جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات
مرحله دوم (اول دبیرستان)
هفدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۵

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
-	۵	۱۲۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۵ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- جمع بخش‌پذیر (۱۵ نمره)

n $n^۲$ عدد طبیعی داده شده است. ثابت کنید n تا از آن‌ها هستند که جمع‌شان بر n بخش‌پذیر است.

۲- رنگین‌مسیر (۱۵ نمره)

بازی «رنگین‌مسیر» یک بازی دونفره است که روی یک صفحه‌ی n ٤ (٤ سطر و n ستون) که در ابتدا سفید رنگ است انجام می‌شود. بهروز و حمید مشغول انجام این بازی هستند و به نوبت طبق قوانین بازی حرکت می‌کنند. بهروز از رنگ آبی و حمید از رنگ قرمز استفاده می‌کند. بازی به این صورت انجام می‌شود که بهروز در هر مرحله دو خانه‌ی سفیدرنگی که در یک ضلع با هم مشترک هستند و تشکیل یک مستطیل ۲ ۱ (یک سطر و دو ستون) می‌دهند را انتخاب می‌کند و آن‌ها را به رنگ خود (آبی) در می‌آورد. حمید نیز در نوبت خود دو خانه‌ی سفیدرنگی که در یک ضلع با هم مشترک باشند و تشکیل یک مستطیل ۱ ۲ (دو سطر و یک ستون) بدهند را انتخاب می‌کند و آن‌ها را به رنگ خود (قرمز) در می‌آورد. اگر کسی نتواند در نوبت خود حرکت کند (یعنی نتواند دو خانه‌ی مجاور با شرایط گفته شده پیدا کند) نوبت بازی به نفر مقابل می‌رسد و اگر هیچ یک از دو نفر قادر به انجام حرکت نباشند بازی تمام می‌شود.

در پایان اگر دنباله‌ای از خانه‌های آبی وجود داشته باشد که هر کدام در یک ضلع با خانه‌ی بعدی مشترک باشد و اولین خانه در ستون اول جدول و آخرین خانه در ستون آخر قرار داشته باشد، در این صورت بهروز برنده‌ی بازی است.

اگر دنباله‌ای از خانه‌های قرمز وجود داشته باشد که هر کدام در یک ضلع با خانه‌ی بعدی مشترک باشد و اولین خانه در سطر اول جدول و آخرین خانه در سطر آخر قرار داشته باشد، در این صورت حمید برنده‌ی بازی است.

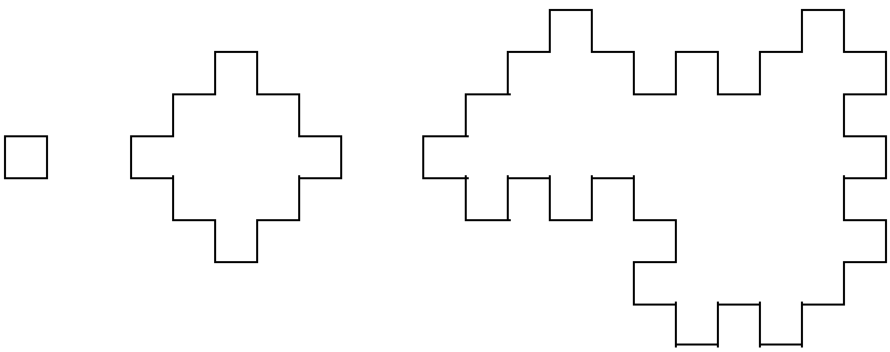
اگر هیچ یک از دو حالت فوق اتفاق نیفتد، بازی مساوی می‌شود. با فرض اینکه هر دو نفر به بهترین نحو ممکن بازی می‌کنند، به ازای هر ۷ n:

الف) اگر حمید شروع‌کننده‌ی بازی باشد، چه کسی بازی را می‌برد؟ (۷ نمره)

ب) اگر بهروز شروع‌کننده‌ی بازی باشد، چه کسی بازی را می‌برد؟ (۷ نمره)

۳- چندضلعی پلکانی (۲۰ نمره)

یک چندضلعی را پلکانی می‌گوییم اگر (۱) هر دو ضلع متوالی آن بر هم عمود باشند، (۲) طول همه‌ی اضلاع آن یک باشد، (۳) خودش را قطع نکند. شکل‌های زیر نمونه‌هایی از چندضلعی‌های پلکانی هستند:

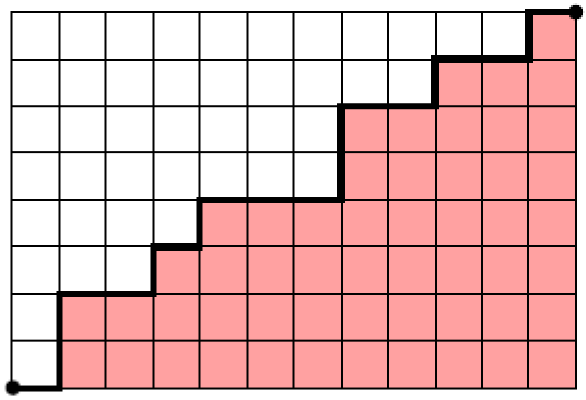


نشان دهید برای هر $n > ۱۰$ ، حداقل یک چندضلعی پلکانی به مساحت n وجود دارد.

۴- مساحت مسیر (۲۰ نمره)

پریسا در نقطه‌ی پایین سمت چپ یک جدول $m \quad n$ (دارای m سطر و n ستونِ خانه) ایستاده است و می‌خواهد با $m + n$ حرکت خود را به نقطه‌ی بالا سمت راست این جدول برساند. او در هر حرکت می‌تواند یک واحد به سمت راست یا یک واحد به سمت بالا بر روی خطوط جدول برود. به این ترتیب، پریسا در حرکت خود از نقطه‌ی پایین سمت چپ به نقطه‌ی بالا سمت راست، مسیری به طول $m + n$ را طی می‌کند. تعداد خانه‌های زیرِ یک مسیر را «مساحت» یک مسیر می‌نامیم. در شکل زیر نمونه‌ای از یک مسیر را در یک جدول ۱۲ ۸ مشاهده می‌کنید. خانه‌های زیر مسیر در آن مشخص شده‌اند و مساحت مسیر برابر ۵۳ است.

نقطه پایان



نقطه شروع

فرض کنیم پریسا به A حالت مختلف بتواند از گوشه‌ی پایین سمت چپِ جدول به بالا سمت راست آن برود. مجموع مساحت‌های این A مسیر را B می‌نامیم. $\frac{B}{A}$ چه‌قدر است؟ (به عبارت دیگر میانگین مساحتِ مسیرهایی که پریسا می‌تواند طی کند، چه‌قدر است؟)

۵- جدول طلایی (۳۰ نمره)

یک جدول $n \quad n$ را «طلایی» می‌گوییم اگر برای هر دو سطر a و b و هر دو ستون c و d آن داشته باشیم:

$$M_{ac} + M_{bd} \neq M_{ad} + M_{bc}$$

منظور از M_{ij} ، خانه‌ی سطر i اُم و ستون j اُم جدول است. به عنوان مثال، جدول ۳ در ۳ روبه‌رو یک جدول طلایی است.

۰	۰	۱
۰	۱	۰
۱	۰	۰

ثابت کنید اگر همه‌ی عناصر یک جدول طلایی از مجموعه‌ی $\{۰,۱,۲,..,k\}$ انتخاب شوند، آن‌گاه $n \quad ۲k+۱$ است.