جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
هفتمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۷۵

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۴۰	۲۰	۲۴۰

توضیحات مهم

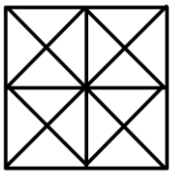
استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۴۰ سؤال چند گزینه‌ای و ۲۰ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- چند مثلث در شکل مقابل وجود دارد؟



الف) ۳۶ ب) ۴۰
ج) ۴۲ د) ۴۵
هـ) ۴۸

۲- منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگ ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی با x و منظور از $\lceil x \rceil$ ، کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی با x است. از گزاره‌های زیر کدام درست هستند؟

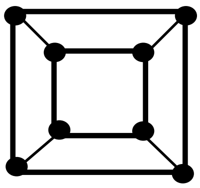
I. $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ اگر و فقط اگر x عدد صحیح باشد.
II. $\lfloor x \rfloor + ۱ = \lceil x \rceil$ اگر و فقط اگر x عدد صحیح نباشد.
III. $\lfloor x \rfloor \lceil y \rceil = \lceil x \rceil \lfloor y \rfloor$ برای هر x و y.
IV. $\lfloor x \rfloor = \lceil -x \rceil$ برای هر x.

الف) فقط IV ب) فقط I و IV ج) فقط I، II ، III
د) فقط I، II، IV هـ) I، II ، III، IV

۳- حداکثر چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $X = ۱,۲,۳,۴,۵$ می‌توان انتخاب کرد، به طوری که اجتماع هیچ دو زیرمجموعهٔ انتخاب شده مساوی مجموعه X نشود؟

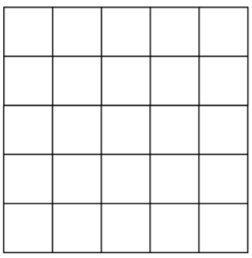
الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۶ د) ۲۰ هـ) ۲۶

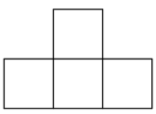
۴- در شکل مقابل هر نقطه یک کامپیوتر و هر خط، یک سیم ارتباطی است که دو کامپیوتر را به هم وصل می‌کند. یک «خرابی منظم» در سیستم هنگامی به وجود می‌آید که از هر کامپیوتر دقیقاً یکی از سیم‌های ارتباطی‌اش قطع شده باشد. به چند حالت ممکن است
خرابی منظم در این سیستم روی دهد؟



الف) ۶ ب) ۷
ج) ۸ د) ۹
هـ) ۱۰

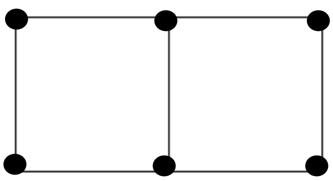
۵- به چند طریق می‌توان چهارتا از خانه‌های شکل زیر را رنگ کرد که خانه‌های رنگ شده به شکل زیر باشند؟





الف) ۴۸ ب) ۴۴
ج) ۶۰ د) ۲۴
هـ) ۳۶

۶- نقشهٔ خیابان‌های شهری به صورت شکل زیر است. (هر یک از دایره‌ها نشان‌دهندهٔ یکی از میدان‌های شهر و هر خط نشان‌دهندهٔ یک خیابان است). می‌خواهیم همهٔ خیابان‌های این شهر را یک طرفه کنیم. به طوری که از هر یک از میدان‌های شهر با استفاده از این خیابان‌ها بتوان به هر میدان دیگری رفت. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

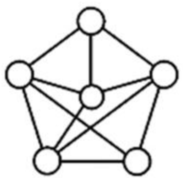


الف) ۳ ب) ۶
ج) ۸ د) ۶۴
هـ) ۱۲۸

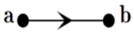
۷- تیم‌های کشورهای ایران، امارات، کویت و عربستان در یک مسابقه دوره‌ای شرکت کرده‌اند، یعنی هر دو تیم دقیقاً یکبار با هم بازی کرده‌اند، در هر بازی، تیم برنده ۲ امتیاز و بازنده صفر امتیاز می‌گیرد. اگر نتیجهٔ بازی مساوی باشد هر تیم صاحب یک امتیاز می‌شود. فردی که نتایج بازی را نمی‌داند رادیو را روشن می‌کند. گویندهٔ خبر به آنجا رسیده است که می‌گوید: «... و کویت چهارم شد. پس هیچ دو تیم دارای مجموع امتیاز مساوی نشدند و تنها بازی‌ای که با نتیجهٔ مساوی خاتمه یافت بازی امارات و عربستان بود» با این اطلاعات مجموع امتیاز و رتبهٔ تیم ایران را پیدا کنید.

الف) ۶ امتیاز، رتبه اول
ب) ۴ امتیاز، رتبه اول
ج) ۴ امتیاز، رتبه دوم
د) ۲ امتیاز، رتبه دوم
هـ) ۲ امتیاز، رتبه سوم

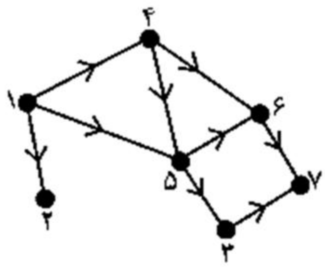
۸- در شکل زیر می‌خواهیم در هر یک از دایره‌ها یکی از عددهای ۱ تا ۶ را بنویسیم (هر عدد در یک خانه) به طوری که مجموع قدرمطلق تفاضل عددهای نوشته شده در دایره‌هایی که به هم متصل‌اند، مینیمم باشد. این مقدار مینیمم چقدر است؟



الف) ۲۲
ب) ۲۴
ج) ۲۵
د) ۲۶
هـ) ۳۵

۹- برای انجام پروژهٔ خاصی به انجام هفت کار مختلف نیازمندیم. ترتیب انجام کارها در شکل زیر آمده است، به این صورت  نشان می‌دهد که کار a باید قبل از کار b صورت گیرد.

این پروژه را به چند ترتیب مختلف می‌توان انجام داد؟



الف) ۱۸
ب) ۱۵
ج) ۱۲
د) ۹
هـ) ۶

۱۰- تعداد $\frac{n(n+1)}{2}$ گوی به شکل مثلثی به ضلع n گوی چیده شده‌اند. وقتی که یک گوی را از قاعدهٔ این مثلث برمی‌داریم، تمام گوی‌هایی که در سطر بالایی با آن در تماس‌اند نیز برداشته می‌شوند و به همین ترتیب کار ادامه پیدا می‌کند، تا بالاترین گوی هم برداشته شود. می‌دانیم که با برداشتن یک گوی از قاعدهٔ مثلث مجموعاً ۲۵ گوی برداشته شده است. n چند بوده و چندمین گوی از قاعدهٔ مثلث برداشته شده است؟

الف) $n=11$ و گوی سوم قاعده
ب) $n=10$ و گوی چهارم قاعده
ج) $n=10$ و گوی سوم قاعده
د) $n=9$ و گوی پنجم قاعده
هـ) $n=9$ و گوی چهارم قاعده

۱۱- در یک جدول ۴×۴ عددهای ۱ تا ۴ به صورتی نوشته شده‌اند که در هیچ سطر و هیچ ستونی عدد تکراری وجود ندارد، عددهای نوشته شده در چهارتا از خانه‌های این جدول را، مطابق شکل زیر می‌دانیم. عدد موجود در خانه‌ای که با ❊ مشخص شده است، چه می‌تواند باشد؟

۱			
	۲		
		❊	۳
			۲

الف) ۱
ب) ۴
ج) ۳
د) ۲
هـ) با اطلاعات فوق، نمی‌توان این خانه را به صورت یکتا تعیین کرد.

۱۲- سه دهکدهٔ A، B و C به ترتیب روی یک خط راست واقع شده اند. فاصلهٔ A و B، یک کیلومتر و فاصلهٔ B و C، ۴ کیلومتر است. مقدار مصرف روزانهٔ سوخت در A، B و C به ترتی ب ۲۰۰، ۳۰۰ و ۴۰۰ لیتر است. می‌خواهیم یک انبار سوخت برای این سه دهکده تأسیس کنیم، به طوری که هزینهٔ روزانهٔ حمل سوخت به این دهکده‌ها مینیمم باشد. این انبار سوخت باید در کجا قرار گیرد؟ (هزینهٔ حمل متناسب با حجم سوخت حمل شده و فاصلهٔ طی شده است.)

الف) در دهکدهٔ B

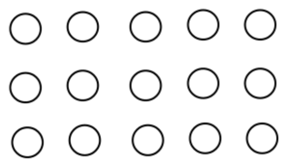
ب) در نقطهٔ وسط BC

ج) بین B و C و در فاصله ۱/۵ کیلومتری B

د) در نقطهٔ وسط AB

هـ) بین B و C و در فاصله ۰/۵ کیلومتری B

۱۳- حداکثر چندتا از دایره‌های شکل زیر را می توان پر کرد به طوری که هیچ چهار دایرهٔ پر شده‌ای رئوس یک مربع یا مستطیل با اضلاع افقی و عمودی نباشد؟



الف) ۶ ب) ۷

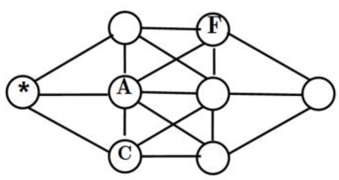
ج) ۸ د) ۹

هـ) ۱۰

۱۴- عددهای ۱ تا ۱۳۷۵ در یک ردیف نوشته شده‌اند. یک نفر از ابتدای این اعداد شروع می‌کند و عدد اول را خط می‌زند. عدد دوم را باقی می‌گذارد و عدد سوم را هم خط می‌زند و به همین ترتیب یک در میان عددها را خط می‌زند. سپس دوباره از اول لیست شروع می‌کند و اولین عددی را که خط نخورده است خط می‌زند و به همین صورت یک در میان عددهایی را که خط نخورده‌اند خط می‌زنند. پس از آن دوباره از اول شروع می‌کند و همین کار را تا جایی ادامه می‌دهد که فقط یک عدد باقی بماند. آن یک عدد چند است؟

الف) ۱۳۷۴ ب) ۱۰۲۴ ج) ۶۸۷ د) ۶۸۲ هـ) ۵۱۲

۱۵- حروف A تا H را در هشت دایرهٔ شکل زیر قرار داده‌ایم با این شرط که حرف‌های قرار گرفته در دو دایره‌ای که با یک خط مستقیم به هم متصل‌اند از نظر الفبایی متصل نباشند. در دایره‌ای که با ستاره مشخص شده است، چه حرفی قرار گرفته است؟



الف) D ب) E

ج) G د) H

هـ) چنین کاری امکان پذیر نیست.

۱۶- با ارقام ۳، ۵ و ۷ به چند طریق می‌توان یک عدد چهار رقمی ساخت که بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

الف) ۲۱ ب) ۲۷ ج) ۱۸ د) ۲۴ هـ) ۱۹

۱۷- تعدادی عدد را روی یک ردیف نوشته‌ایم. می‌دانیم که هر عدد (به جز عددهای اول و آخر)، یکی بیشتر از واسطهٔ حسابی دو عدد مجاورش است. اگر عدد اول در این ردیف ۱، و عدد هفتم ۱۳ باشد، عدد پنجم چند است؟

الف) ۹ ب) ۱۳ ج) ۱۵

د) ۱۶ هـ) ۱۷

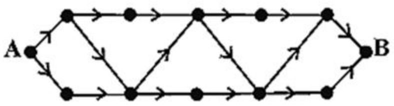
۱۸- برای هر جایگشت P_1, P_2, P_3, P_4 از مجموعهٔ ۱,۲,۳,۴ ، مجموع $|P_1 - P_2| + |P_3 + P_4|$ را حساب می‌کنیم. مجموع همهٔ مقادیر محاسبه شده برای همهٔ جایگشت‌های مجموعهٔ ۱,۲,۳,۴ ، چقدر است؟

الف) ۴۸ ب) ۶۴ ج) ۸۰
د) ۹۲ هـ) ۱۲۰

۱۹- تعداد رشته‌هایی از صفر و یک به طول هفت که شامل ۱۰۱۰۱ باشند چند تاست؟

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۱
د) ۱۲ هـ) هیچ‌کدام

۲۰- در شکل مقابل چند مسیر از A به B وجود دارد؟



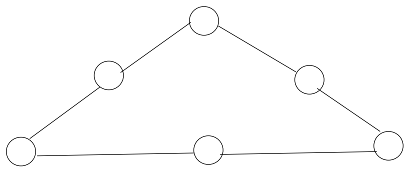
الف) ۸ ب) ۱۳ ج) ۱۶
د) ۳۲ هـ) ۸۱

۲۱- در هر یک از خانه‌های جدول زیر، یک رقم بین صفر تا ۹ نوشته شده است. می‌دانیم که حاصل جمع عددهای نوشته شده در هر سه خانهٔ متوالی برابر با ۲۰ است. مقدار x چقدر است؟

			۹				x				۷		

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۷ هـ) ۹

۲۲- اعداد ۱ تا ۶ روی اضلاع یک مثلث (شکل مقابل) باید طوری قرار داده شوند که مجموع اعداد روی هر ضلع مثلث مساوی n باشد. n چه مقادیری می‌تواند باشد؟



الف) ۱۲و ۹ ب) ۱۱ و ۱۰
ج) ۱۳ و ۱۱ و ۹ د) ۱۲ و ۱۱ و ۱۰ و ۹
هـ) ۱۲ و ۱۰ و ۸

۲۳- در قسمتی از یک برنامه، دستورات زیر نوشته شده‌اند:

اگر $A < B$، مقدار F را محاسبه کن، در غیر این صورت، اگر $C > D$، مقدار G را محاسبه کن.

فرض کنید که به طور متوسط در ۷۵ درصد از موارد، شرط $A > B$ و در ۵۰ درصد از موارد شرط $C > D$ برقرار است. اگر دستورات فوق ۱۰۰۰۰ بار انجام شوند، به طور متوسط هر یک از مقادیر F و G چند بار محاسبه می‌شوند؟

الف) F ، ۲۵۰۰بار و G ، ۳۷۵۰ بار ب) F ، ۷۵۰۰بار و G ، ۱۲۵۰ بار
ج) F ، ۷۵۰۰بار و G ، ۳۷۵۰ بار د) F ، ۷۵۰۰بار و G ، ۵۰۰۰ بار هـ) F ، ۹۳۷۵بار و G، ۱۲۵۰ بار

۲۴- در مربع زیر می‌خواهیم مسیری از خانه A به خانهٔ B پیدا کنیم که مجموع اعداد خانه‌های روی آن مینیمم باشد. این مقدار مینیمم چقدر است؟ (در هنگام پیمودن مسیر، از هر خانه فقط می‌توان به خانه‌ای رفت که یک ضلع مشترک با آن داشته باشد.)

B

۴	۸	۴	۱
۱۵	۱۰	۶	۵
۵	۱۱	۹	۱۰
۱	۷	۱۲	۶

A

الف) ۳۶ ب) ۳۷
ج) ۳۸ د) ۳۹
هـ) ۴۰

۲۵- در جدول ۳ × ۳ ی زیر، عددهای طبیعی به صورتی نوشته شده بودند که مجموع اعداد هر ستون، و مجموع اعداد هر قطر و مجموع اعداد هر سطر این مربع عدد ثابتی بود. متأسفانه تمام این اعداد بجز سه عددی که در شکل نشان داده شده، پاک شده‌اند. در خانه‌ای که با علامت ❊ مشخص شده، چه عددی قرار داشته است؟

❊	۷	۱۲
۳		

الف) ۶
ب) ۱۳
ج) ۱۷
د) ۲۳
هـ) ۲۴

۲۶- الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. در این الگوریتم n یک عدد طبیعی و A یک آرایه است که عنصر iام آن را با $A[i]$ نشان می‌دهیم.

۱- $A[1]$ را مساوی با صفر و $A[2]$ را مساوی با یک قرار بده.

۲- برای هر i از ۲ تا n کار زیر را انجام بده:

۲. ۱- برای هر j از 2^{i-1} تا 2^i کار زیر را انجام بده:

۲. ۱. ۱- $A[j]$ را مساوی با $2^{i-1}+[2^i-j+1]$ قرار بده.

کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد مقدار آرایهٔ A پس از اجرای این الگوریتم، درست است؟

الف) دنبالهٔ اعداد صفر تا 2^{n-1} به ترتیب صعودی در A قرار دارد.

ب) هر دو عدد متوالی از آرایه A در مبنای ۲ دقیقاً در یک رقم متفاوت هستند.

ج) آرایه A شامل عناصر تکراری است.

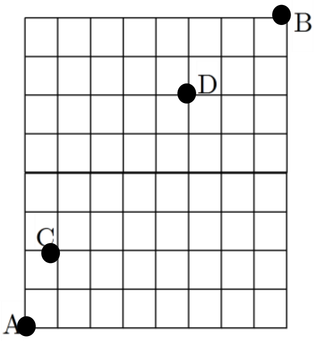
د) عناصر اول تا 2^{n-1} ام آرایه A به ترتیب صعودی و بقیه عناصر به ترتیب نزولی هستند.

هـ) «ج» و «د» درست‌اند.

۲۷- در شماره گذاری صفحات کتابی ۱۹۹۷ بار عدد ۱ به کار رفته است. تعداد صفحات این کتاب در چه محدوده‌ای است؟

الف) ۳۲۰۰ - ۳۰۰۰
ب) ۲۲۰۰ - ۲۰۰۰
ج) ۲۷۰۰ - ۲۵۰۰
د) ۳۷۰۰ - ۳۵۰۰
هـ) ۵۲۰۰ - ۵۰۰۰

۲۸- در شکل زیر چند مسیر از A به B وجود دارد که از C می‌گذرد ولی از D نمی‌گذرد؟ (در طول مسیر فقط می‌توان به سمت راست یا بالا حرکت کرد.)



الف) ۵۱
ب) ۱۵۰
ج) ۱۸۰
د) ۴۵۰
هـ) ۵۴۰

۲۹- دیوارهای خارجی یک باغ، مستقیم هستند و هر یک از این دیوارها با دو دیوار مجاورش یک زاویهٔ قائمه می‌سازد. این دیوارها با هم یک دور بسته را می‌سازند که باغ را محصور می‌کند. اگر بدانیم که طول دیوارهای این باغ، به ترتیب برابر با ۱۲، ۵، ۱۰، ۴، ۵، ۲، ۳ و ۷ است، مساحت این باغ چقدر است؟

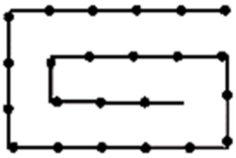
الف) ۷۴
ب) ۸۴
ج) ۱۳۵
د) ۵۳
هـ) ۷۷

۳۰- یک هفت ضلعی محدب داریم و همهٔ قطرهای آن را رسم کرده‌ایم. می‌دانیم که هیچ سه قطری همرس نیستند مگر در رئوس. تعداد مثلث‌های تولید شده‌ای که دقیقاً یک رأس آنها از رئوس هفت ضلعی است برابر است با:

الف) ۲۱
ب) ۱۰۵
ج) ۷۰
د) ۱۴۰
هـ) ۳۵

۳۱- از یک مستطیل شطرنجی با اضلاع 5×3 که اضلاع مربع‌های آن چوب کبریت هستند. بعضی از چوب کبریت‌ها را بر می‌داریم تا مارپیچی مانند شکل زیر با ۲۳ چوب کبریت به دست آید. اگر همین کار را با مستطیل شطرنجی دیگری انجام دهیم و ۸۷ چوب کبریت

باقی بماند، اضلاع این مستطیل چقدر بوده است؟



الف) 7×10
ب) 7×11
ج) 6×11
د) 8×10
هـ) 7×9

۳۲- فردی به تازگی وارد کشوری شده است و در مورد ارزش سکه‌های این کشور چیزی نمی‌داند. یک بار که او جنسی می‌خرد، فروشنده باقیماندهٔ پولش را که برابر با ۲۸ واحد است، به صورت چهار سکه به او می‌دهد. یکبار دیگر، فروشنده ۲۱ واحد را به صورت پنج سکه به او می‌دهد. می‌دانیم که در این کشور تنها سه نوع سکه وجود دارد و در هر دو مورد، سکه‌هایی که این فرد دریافت کرده است، شامل هر سه نوع سکه می‌شود، پرارزش‌ترین سکه، معادل چند واحد ارزش دارد؟

الف) ۵
ب) ۸
ج) ۱۰
د) ۱۱
هـ) ۱۵

۳۳- به چند طریق می‌توان ده توپ یکسان را در ده جعبهٔ متمایز جای داد به طوری که دقیقاً ۳ جعبه خالی باشد؟

الف) $5!\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}$
ب) $\begin{bmatrix}10\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$
ج) $\begin{bmatrix}10\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\10\end{bmatrix}$
د) $\begin{bmatrix}10\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\3\end{bmatrix}$
هـ) $7!\begin{bmatrix}10\\3\end{bmatrix}$

۳۴- سه سبد به تعداد مساوی سیب دارند. مینا یک سیب از یکی از سبدها برمی‌دارد و در یک سبد دیگر می‌گذارد. سپس مریم ۲ سیب از سبد دل‌خواه خودش برداشته، در یک سبد دیگر می‌گذارد، و بعد مهرنوش ۴ سیب از سبد دل‌خواه خودش برداشته، در سبد دیگر می‌گذارد، در پایان یکی از سبدها ۲ برابر سبد دیگر و ۳ برابر سبد سوم سیب دارد. در ابتدا در هر سبد چند سیب وجود داشته است؟

الف) ۱۰
ب) ۱۱
ج) ۲۱
د) ۲۲
هـ) ۳۳

۳۵- یک کامپیوتر دارای یک «ثبّات» (ثبت کننده) است که می‌تواند یک عدد صحیح را نگهداری کند و یک حافظه، که می‌تواند تعدادی متغیر را در خود ذخیره کند. این کامپیوتر دارای دستورات زیر است:

- LOAD x : مقدار ثبّات را مساوی با متغیر x قرار می‌دهد.
- STORE x : مقدار متغیر x را برابر با مقدار ثبات قرار می‌دهد.
- ADD x : مقدار ثبات را با مقدار متغیر x جمع کرده، حاصل را در ثبات ذخیره می‌کند.
- MULT x : مقدار ثبات را در مقدار متغیر x، ضرب کرده، حاصل را در ثبات ذخیره می‌کند.

برنامهٔ زیر به این کامپیوتر داده می‌شود. در انتهای کار این برنامه مقدار ذخیره شده در z، برحسب مقادیر اولیه متغیرها، چقدر است؟

```
LOAD b
MULT c
STORE t1
ADD a
STORE t2
MULT t2
ADD t1
STORE z
```

الف) $t_1(bc+a)+t_2$
ب) $(a+bc)^2+bc$
ج) $2bc+a^2$
د) $(a+bc)+bc$
هـ) $a+2bc$

۳۶- حال برنامهٔ زیر را در نظر بگیرید. در انتهای اجرای این برنامه، مقدار ذخیره شده در ثبات، برحسب مقادیر اولیهٔ متغیرها، چقدر است؟

$LOAD\ a$
$ADD\ b$
$STORE\ x$
$MULT\ x$
$STORE\ z$
$ADD\ x$
$MULT\ a$
$MULT\ z$

الف) $a(a+b)^4 + a(a+b)^3$
ب) $(a+b)\left[(a+b)^2 + (a+b)\right]$
ج) $az(x+z)$
د) $a\left[(a+b)^3 + (a+b)^2\right]$
هـ) $a(a+b)^4$

۳۷- در هر رشته اقلام صفر تا نه را یک عدد اصلی می‌نامیم، مثل ۰۱۰۷ یا ۱۵۷. نمایش صفرشماری یک عدد اصلی را به این صورت تعریف می‌کنیم:

- نمایش صفرشماری هر عدد اصلی یک رقمی i، i تا صفر پشت سر هم است.
- برای به دست آوردن نمایش صفرشماری یک عدد اصلی با بیش از یک رقم، نمایش صفرشماری هر رقم را مطابق با دستور فوق نوشته و بین نمایش هر دو رقم یک ۱ قرار می‌دهیم. (مثال: نمایش صفرشماری عددی سه رقمی ۴۱۲ به صورت ۰۰۰۰۱۰۱۰۰ است.)

در میان اعداد اصلی با تعداد ارقام کم‌تر از ۴، چند عدد وجود دارند که تعداد رقم‌های آن‌ها با تعداد رقم‌های نمایش صفرشماری‌شان برابر باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۶ هـ) ۸

۳۸- نمایش یک شماری یک عدد اصلی با تبدیل کردن همهٔ صفرهای نمایش صفرشماری آن به یک و همهٔ یک‌های نمایش صفرشماری آن به صفر به دست می‌آید. چند عدد اصلی وجود دارند که نمایش اصلی آن‌ها عیناً مثل نمایش یک شماری آن‌ها باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ∞

۳۹- آرایهٔ ۶ تایی A به ترتیب با عددهای ۱ تا ۶ پر شده است. پس از اجرای الگوریتم زیر عدد ۶ در کدام خانه خواهد بود؟

۱ـ به ازای i از ۱ تا ۱۳۷۵ کارهای زیر را انجام بده:

۱. ۱ـ به ازای j از ۱ تا ۳ این کار را انجام بده:

۱.۱.۱ـ اگر $A[j]$ از $A[j+3]$ بزرگ‌تر است، جایشان را عوض کن.

۱. ۲ـ به ازای j از ۱ تا ۵ این کار را انجام بده:

۱.۲.۱ـ اگر $A[j]$ از $A[j+1]$ کوچک‌تر است، جایشان را عوض کن.

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) ۶

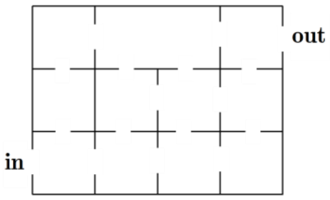
۴۰- رشته مخصوص را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- a یک رشتهٔ مخصوص است.
- b یک رشتهٔ مخصوص است.
- اگر S یک رشتهٔ مخصوص باشد Sa و bSb نیز رشته‌های مخصوص هستند. کدام یک از خواص زیر در مورد رشته‌های مخصوص درست است؟

الف) هر رشته مخصوص متقارن است.
ب) در هر رشته مخصوص قدر مطلق تفاوت تعداد aها با تعداد bها برابر یک است.
ج) هر رشته مخصوص به شکل WaW یا WbW است به طوری که W رشته مخصوص از a و b باشد.
د) «الف» و «ب» و «ج» درست هستند.
هـ) «الف» و «ج» درست هستند.

مسأله‌های بله ـ خیر

۴۱- آیا می‌توان از در ورودی تالار زیر وارد و از در خروجی خارج شد به طوری که هر یک از غرفه‌ها دقیقاً یکبار بازدید شوند؟



۴۲- افراد A و B و C و D دربارهٔ دروغگو یا راستگو بودن افراد x، y، z و w به این صورت اظهار نظر کرده‌اند:

- A می‌گوید: x دروغگو است یا z راستگو است.
- B می‌گوید: z دروغگو است یا w دروغگو است.
- C می‌گوید: x راستگو است یا y راستگو است.
- D می‌گوید: y دروغگو است یا w راستگو است.

آیا امکان دارد که همهٔ اظهار نظرهای فوق درست باشند؟

۴۳- دو ماشین در اختیار داریم که هر یک، یک کارت را که بر روی آن یک عدد مثل a نوشته شده است، به عنوان ورودی دریافت می‌کند و یکی از آن‌ها یک کارت که بر روی آن عدد $a+3$ نوشته شده است و دیگری یک کارت که بر روی آن عدد $2a$ نوشته شده است را تولید می‌کند. در ابتدا یک کارت که بر روی آن عدد ۱ نوشته شده است در اختیار داریم آیا می‌توان با استفاده از این ماشین‌ها یک کارت ایجاد کرد که بر روی آن عدد ۱۲ نوشته شده باشد؟

۴۴- یک بازی را به این صورت تعریف می‌کنیم که بازیکن A در هر نوبت یک عدد فرد و بازیکن B در هر نوبت یک عدد زوج که قبلاً انتخاب نشده باشد را از بین عددهای ۱ تا ۶ انتخاب می‌کنند. اولین بازیکنی که پس از نوبتش، مجموع همهٔ عددهای انتخاب شده توسط هر دو بازیکن بر ۳ قابل قسمت شود، بازنده است. آیا بازیکن اول می‌تواند طوری بازی کند که همواره برنده شود؟

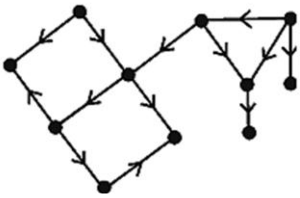
۴۵- آیا می‌توان ۷ خانه از صفحهٔ شطرنجی 8×8 را علامت‌گذاری کرد، به طوری که هر خانه علامت‌گذاری شده، با تعداد فردی از خانه‌های علامت‌گذاری شده همسایه باشد؟ (دو خانه تنها وقتی همسایه به حساب می‌آیند که یک ضلع مشترک داشته باشند.)

۴۶- در اداره‌ای، هر روز یکی از کارمندها در یک ساعت مشخص وارد اداره می‌شود و تا ساعت مشخصی در اداره می‌ماند. (ساعت کاری افراد مختلف می‌تواند متفاوت باشد.) اگر دو نفر در یک زمان در اداره باشند، حتماً همدیگر را می‌بینند. در مورد ۵ کارمند A، B، C، D و E می‌دانیم که:

- C، کارمندان A و B را می‌بینند ولی D و E را نمی‌بینند.
- A و B هیچ گاه همدیگر را نمی‌بینند.
- A، کارمند D را و B، کارمند E را می‌بینند.

آیا D و E همدیگر را می‌بینند؟

۴۷- در شکل زیر، نقطه‌ها متناظر با ۱۱ کار هستند و $A \bullet\!\!\longrightarrow\!\!\bullet B$ بدین معنی است که قبل از اتمام کار A، کار B نمی تواند شروع شود. دو کارگر داریم که هر یک می‌تواند هر کار را در یک ساعت انجام دهد. آیا با استفاده از این دو کارگر می‌توان با رعایت شرط فوق، تمام کارها را در مدت حداکثر ۶ ساعت انجام داد؟



۴۸- آیا می‌توان ۵ نقطه با مختصات صحیح روی یک محور پیدا کرد که فاصلهٔ دوبه‌دوی آنها (بدون ترتیب) عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ باشد؟

۴۹- آیا می‌توان عددهای صفر تا ۱۲۷ را به دو دسته چنان تقسیم کرد که هر دو عددی که نمایش آن‌ها در مبنای دو دقیقاً در یک رقم با هم تفاوت دارند در یک دسته نباشند؟

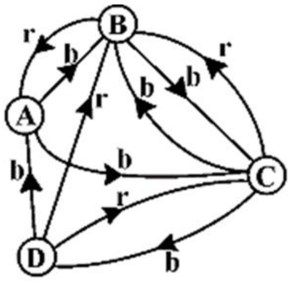
۵۰- در یک مسابقه شطرنج که به صورت دوره‌ای برگزار می‌شود (یعنی هر دو بازیکن با هم دقیقاً یک بار رو به رو می‌شوند) ۵ بازیکن A، B، C، D و E شرکت کرده‌اند. تاکنون نتایج زیر به دست آمده است:

A از B و C برده است و B و D با هم مساوی کرده‌اند. با توجه به این که هر برد ۱ امتیاز، مساوی ۰/۵ امتیاز و باخت صفر امتیاز دارد.
آیا بازیکن B هنوز شانس قهرمانی دارد؟ (اگر دو تیم صدر جدول امتیاز مساوی داشته باشند، تیمی که دیگری را برده باشد قهرمان است و اگر نتیجه بازی آن دو مساوی بوده باشد هیچ کدام قهرمان نمی‌شوند.)

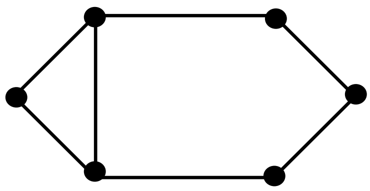
۵۱- در بازی A، دو بار تاس انداخته می‌شود و در صورتی که لااقل یک بار ۱ بیاید برنده می‌شویم. در بازی B، چهار بار تاس انداخته می‌شود و در صورتی که لااقل دو بار ۱ بیاید برنده می‌شویم. آیا احتمال برد در بازی A بیشتر از احتمال برد در بازی B است؟

۵۲- آیا می‌توان ۱۳ زیر مجموعهٔ $A_1, A_2, \ldots, A_{13}$ از مجموعهٔ $\{1,2,3,4,5\}$ را طوری پیدا کرد که به ازای هیچ i و j $(i \neq j)$، شرط $A_i \subseteq A_j$ برقرار نباشد؟

۵۳- در شکل زیر خط‌هایی که با r مشخص شده‌اند، قرمز و آنهایی که با b مشخص شده‌اند آبی هستند. آیا با توجه به جهت‌هایی که روی خط‌ها مشخص شده‌اند، مسیری از A به D وجود دارد که رنگ خط‌های آن به ترتیب آبی، آبی، آبی، قرمز و آبی باشد؟



۵۴- دو نفر این بازی را روی شکل زیر انجام می‌دهند هر کدام از این دو بازیکن در نوبت خودش یکی از دایره‌هایی را که تاکنون رنگ نشده است با یکی از دو رنگ آبی یا قرمز رنگ می‌کند، به‌شرطی‌که هیچگاه دو دایره‌ای که با یک خط به هم متصلند با یک رنگ رنگ‌آمیزی نشوند. کسی که نتواند در نوبت خودش دایره‌ای را رنگ کند، بازندهٔ بازی محسوب می‌شود. آیا بازیکن اول می‌تواند طوری بازی کند که همواره برنده شود؟

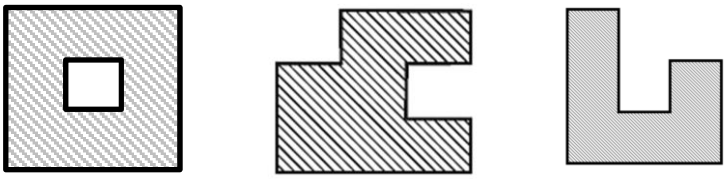


۵۵- تعداد ۱۶ سنگ‌ریزه و سه بازیکن داریم. بازیکن اول در هر نوبت می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۳ سنگ‌ریزه بردارد و بازیکنان دوم و سوم هر کدام در هر نوبت ۱ یا ۲ سنگ‌ریزه. بازیکنی که آخرین سنگ‌ریزه را بردارد برنده است. آیا اگر بازیکنان دوم و سوم با هم متحد شوند می‌توانند بازیکن اول را شکست دهند و یکی از خودشان برنده شود؟

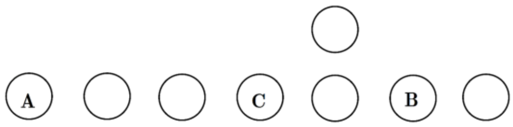
۵۶- در شکل زیر، در هر ردیف یک جایگشت دلخواه از عددهای ۱ تا ۵ را می‌نویسیم. سپس قدرمطلق تفاضل عددهایی را که زیر هم نوشتــه شده‌اند به دست می‌آوریم و پنج عدد به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. آیا این حاصل جمع ممکن است عدد ۷ باشد؟

۵۷- آیا می‌توان در هر یک از ۹ خانهٔ خالی متوالی، یکی از عددهای ۲، ۳ یا ۵ را قرار داد، به طوری که هیچ‌گاه حاصل ضرب چند عدد متوالی، یک مربع کامل نباشد؟

۵۸- آیا می‌توان حجمی ایجاد کرد که از پهلو، روبه رو و بالا به شکل‌های زیر دیده شود؟



۵۹- ۸ سکه در یک ردیف قرار دارند. در هر حرکت می‌توان یک سکه را از روی دو سکه (مجاور یا روی هم) عبور داد به شرط آن که سومین سکه، بعد از آن‌ها وجود داشته باشد تا روی آن بنشیند و یک ستون دو سکه‌ای تشکیل دهد. برای مثال در شکل زیر سکه‌های A و B می‌توانند روی سکهٔ C قرار گیرند. آیا با ۴ حرکت می‌توان ۴ ستون دو سکه‌ای تشکیل داد؟



۶۰- شعبده‌بازی سه شیء الف، ب و ج را در مقابل سه فرد a، b و c قرار می‌دهـد و از آن‌ها می‌خواهد که هر کدام یکی از ۳ شیء را بدون اطلاع شعبده‌باز بردارند. سپس شعبده‌باز به فرد a یک مداد، به فرد b دو مداد و به فرد c سه مداد می‌دهد. آنگاه ۳۰ مداد دیگر را در ظرفی قرار می‌دهد و از سه فرد مزبور می‌خواهد که در غیاب او، آن که شیء الف را دارد به همان تعدادی که قبلاً مداد گرفته است از مدادهــای داخل ظرف بردارد، آن که شیء ب را برداشته است به اندازه دو برابر تعداد مدادهایی که قبلاً گرفته است، مداد بردارد و آن که شیء ج را دارد چهار برابر تعداد مدادهایی که دارد بردارد. شعبده‌باز از اتاق خارج می‌شود و پس از بازگشت تعداد مدادهای باقیمانده در ظرف را ۱۸ عدد می‌بینـد. آیا شعبده‌باز می‌تواند با این اطلاعات مشخص کند که هر فردی چه شیئی را در اختیار دارد؟

پاسخ تشریحی هفتمین المپیاد کامپیوتر

۱- تمام مثلث‌های موجود در شکل قائم الزاویه می‌باشند. ضلع مربع بزرگ را ۲ در نظر می‌گیریم. به تعداد ۱۶ عدد مثلث قائم الزاویه با طول وتر واحد وجود دارد. به تعداد ۱۶ عدد مثلث با ضلع زاویهٔ قائمه واحد وجود دارد. (در داخل هر مربع به ضلع واحد ۴ عدد). به تعداد ۸ مثلث با طول وتر ۲ وجود دارد. (۴ عدد آن‌ها رأسشان اواسط اضلاع مربع و وترهایشان اضلاع مربع می‌باشد و ۴ عدد دیگر از آن‌ها رأسشان اواسط اضلاع مربع بوده وترهایشان پاره خطهایی هستند که اواسط اضلاع مقابل را به هم وصل می‌کنند.) و بالاخره به تعداد ۴ عدد مثلث که طول ضلع زاویهٔ قائمه آن‌ها بابر با ۲ بوده و رأسشان رأس مربع و وترهایشان قطرهای مربع می‌باشند وجود دارد. درنتیجه در مجموع ۴۴ مثلث در شکل دیده می‌شود.

۲- I صحیح است زیرا اگر x عددی صحیح باشد هم $\lfloor x \rfloor$ و هم $\lceil x \rceil$ هر دو با خود x برابرند.

II نیز صحیح است زیرا اگر x صحیح نباشد آن را به صورت $x = m + r$ می‌نویسیم که در آن m یک عدد صحیح است و $0 < r < 1$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor m + r \rfloor = m \quad , \quad \lceil x \rceil = \lceil m + r \rceil = m + 1$$

III غلط است. مثال نقض $x = 4$ و $y = 2/2$ می‌باشد در این صورت خواهیم داشت؛

$$\lceil 4 \rceil \lceil 2/2 \rceil = 4 \times 3 = 12$$

$$\lfloor 4 \rfloor \lfloor 2/2 \rfloor = 4 \times 2 = 8$$

IV صحیح است. زیرا اگر x صحیح باشد در این صورت خواهیم داشت:

$$-\lfloor x \rfloor = -x$$

$$\lceil -x \rceil = -x$$

و اگر x صحیح نباشد آن را به صورت $x = m + r$ می‌نویسیم که در آن m یک عدد صحیح بوده و $0 < r < 1$. در این صورت خواهیم داشت:

$$-\lfloor x \rfloor = -\lfloor m + r \rfloor = -m$$

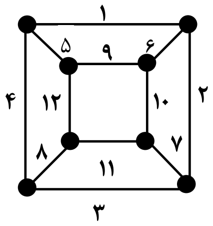
$$\lceil -x \rceil = \lceil -m - r \rceil = \lceil -m + 1 - 1 - r \rceil = \lceil (-m - 1) + (1 - r) \rceil$$

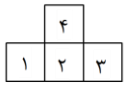
چون $0 < 1 - r < 1$، پس خواهیم داشت:

$$\lceil -x \rceil = (-m - 1) + 1 = -m$$

۳- بدیهی است که هرچه تعداد اعضای زیرمجموعه‌های انتخابی کمتر باشد بهتر است. بدین منظور برای انتخاب زیر مجموعه‌های فوق زیر مجموعه‌های ۰، ۱ و ۲ عضوی را که تعداد آن‌ها $\binom{5}{0}$، $\binom{5}{1}$ و $\binom{5}{2}$ و در مجموعه ۱۶ زیرمجموعه می‌باشند را انتخاب می‌کنیم.

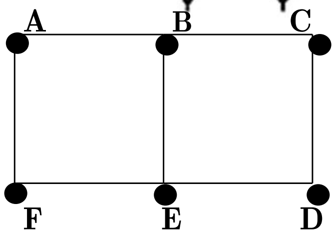
۴- مطابق شکل سیم‌ها را از ۱ تا ۱۲ شماره‌گذاری می‌کنیم دسته سیم‌هایی که می‌توانیم حذف کنیم تا به منظور فوق برسیم عبارتند از: (۱۰و۸و۵و۲)، (۱۱و۶و۵و۳)، (۱۲و۷و۶و۴)، (۸و۷و۶و۵)، (۱۱و۹و۳و۱)، (۱۲و ۱۰و۳و۱)، (۹و۸و۷و۱)، (۱۱و۹و۴و۲)، (۱۲و ۱۰و۴و۱) پس مجموعاً ۹ حالت ممکن است.



۵- خانه‌های رنگ شده را به شکل  شماره‌گذاری می‌کنیم. اگر خانه ۴ بالای شکل باشد بدیهی است که خانه‌های ۱، ۲ و ۳ در سطرهای ۲، ۳، ۴ و ۵ شکل اصلی می‌توانند قرار گیرند و خانه‌های ۱،۲و۳ به‌ترتیب در ستون‌های (۱و۲و۳)، (۱و۳و۴) و (۳و۴و۵) می‌توانند جا به جا شوند پس در این حالت مجموعاً ۴×۳ یعنی ۱۲ نوع رنگ‌آمیزی می‌تواند باشد. اگر خانهٔ ۴ پایین، سمت راست و یا سمت چپ شکل باشد نیز ۱۲ رنگ‌آمیزی موجود خواهد بود. پس کل تعداد حالات برابر ۱۲×۴ یعنی ۴۸ حالت خواهد بود.

۶- با توجه به شکل بدیهی است که جهت مسیرهای AB، AF و FE وابسته به همدیگر و نیز جهت مسیرهای BC، CD و ED وابسته به هم می‌باشند؛ یعنی اگر جهت مسیر AB از A به سمت B باشد، آنگاه مسیر FA از F به سمت A و و مسیر EF از E به سمت F خواهد بود. فلذا کافی است جهت مسیرهای منتهی به B را تعیین کنیم و در آن صورت جهت مسیرهای دیگر خود به خود تعیین خواهند شد. پس تعداد حالات ممکن برابر با تعداد حالاتی است که می‌توان جهت مسیرهای منتهی به B را تعیین کرد.

جهت مسیرهای منتهی به B یکی از حالات زیر است:



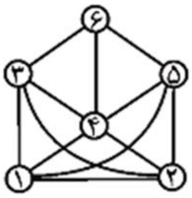
پس تعداد حالات ممکن برابر با ۶ می‌باشد.

۷- بدیهی است که هم مجموع امتیازات امارات و هم عربستان هر دو فرد است از طرف دیگر تعداد کل بازی‌ها ۶ بازی می‌باشد که معلوم می‌شود مجموع امتیازات چهار تیم برابر با ۱۲ می‌باشد.

پس امتیازات هر کدام از تیم‌های امارات و عربستان (۱و۳)، (۱و۵)، (۳و۵) می‌تواند باشد. (۱و۳) نمی‌تواند باشد زیرا در این صورت تیم اول ۶ امتیاز و تیم کویت ۲ امتیاز خواهد داشت که با آخر بودن کویت در تضاد است. (۱و۵) نیز نمی‌تواند باشد زیرا در این صورت به تیم اول ۶ امتیاز و به تیم آخر صفر امتیاز خواهد رسید. یعنی امتیاز چهار تیم به ترتیب ۶و۵و۱و ۰ خواهد بود که امکان ندارد زیرا نتیجهٔ بازی تیم‌های اول و دوم تساوی نمی‌باشد پس یکی از آن‌ها صفر امتیاز از بازی می‌گیرد. حداکثر امتیازش ۴ می‌تواند باشد. پس نتایج مسابقات به شکل زیر است.

الف) عربستان (یا امارات)	۵ امتیاز
ب) ایران	۴ امتیاز
ج) امارات (یا عربستان)	۳ امتیاز
د) کویت	۰ امتیاز

۸- مینیمم حالت برابر با ۲۴ است. یکی از حالاتی که مینیمم را تولید می‌کنند در شکل مقابل آمده است:

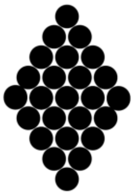


۹- اگر کار شمارهٔ ۲ را در نظر نگیریم بقیهٔ ۶ کار به دو صورت:

$۱ \rightarrow ۴ \rightarrow ۵ \rightarrow ۳ \rightarrow ۶ \rightarrow ۷$ و $۱ \rightarrow ۴ \rightarrow ۵ \rightarrow ۶ \rightarrow ۳ \rightarrow ۷$

قابل انجام است. حال اگر توجه کنیم کار شماره ۲ بعد از کار شماره ۱ در هر مرحله قابل اجراست؛ یعنی بر هر دو مورد بالا ۶ حالت ممکن است اتفاق افتد (یعنی کار شماره ۲ بعد از هر کدام از کارهای شماره ۱و۳و۴و۵و۶و۷ می‌تواند انجام گیرد). پس در کل، تعداد حالات ممکن برای انجام پروژه ۱۲ می‌باشد.

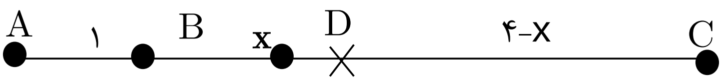
۱۰- شکل برداشته شده یک متوازی الاضلاع $m \times n$ می‌شود. چون ۲۵ را فقط به صورت ۵×۵ می‌توان نوشت پس متوازی الاضلاع حذف شده به شکل مقابل می باشد که تکمیل آن برای تبدیل به مثلث متساوی الاضلاع فقط به یک طریق امکان‌پذیر است که در آن مثلث $n = ۹$ و گوی حذف شده پنجمین گوی قاعده باشد.



۱۱- عدد موجود در خانه مورد نظر ۳ می‌باشد. (مطابق جدول زیر)

۱	۳	۲	۴
۴	۲	۱	۳
۲	۴	$\boxed{۳}$	۱
۳	۱	۴	۲

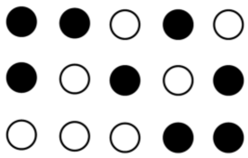
۱۲- موقعیت انبار را در نقطهٔ D در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم فاصله D تا B برابر با x باشد در این صورت فاصله D تا C برابر با $۴ - x$ خواهد بود (اگر D بین B و A باشد این فاصله برابر با $x + ۴$ خواهد بود). کل هزینهٔ مصرفی عبارت خواهد بود با:



$$e = (۱ + x)۲۰۰ + x \times ۳۰۰ + (۴ - x)۴۰۰$$
$$= ۲۰۰ + ۲۰۰x + ۳۰۰x + ۱۶۰۰ - ۴۰۰x = ۱۰۰x + ۱۸۰۰$$

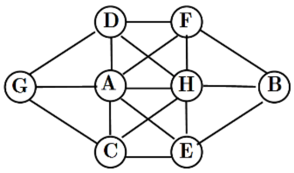
بدیهی است مقدار فوق وقتی مینیمم خواهد بود که مقدار x برابر با صفر باشد یعنی موقعیت منبع در محل دهکدهٔ B باشد.

۱۳- اگر ستونی هر سه دایره‌اش پر باشد در این صورت واضح است که از هر کدام از چهار ستون دیگر فقط یکی از دایره‌هایشان می‌تواند پر باشد زیرا در غیر این صورت مربع یا مستطیل با چهار رأس پر پیدا خواهد شد. در اینصورت ۲×۴ دایره سفید موجود خواهد بود که معلوم می‌شود ۷ دایرهٔ پر وجود دارد. و اما اگر هیچ ستونی هر سه دایره‌اش پر نباشد در این صورت یکی از ستون‌ها (مثلاً اول) که دو دایره‌اش پر می‌باشد را در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال فرض می‌کنیم دو سطر اول ستون اول پر باشند. بدیهی است که در چهار ستون دیگر دو سطر اول و دوم تواماً نباید پر باشند بدیهی است که در چهار ستون دیگر دو سطر اول و دوم تواماً نباید پر باشند و همچنین ۴ دایرهٔ مربوط به سطر آخر چهار ستون پایانی حداکثر ۲ دایره می‌تواند پر باشد. پس کل دایره‌های پر $۲ + ۴ + ۲$ یعنی ۸ دایره می‌تواند باشد که نمونه‌ای از آن در شکل زیر نمایان است:



۱۴- در مرحله اول اعداد فرد خورده و مضارب ۲ باقی می‌مانند. در مرحله دوم مضارب ۴($۲^{۲}$) باقی می‌مانند. در مرحله سوم مضارب ۸($۲^{۳}$) باقی می‌مانند و... و بالاخره در مرحله دهم ۱۰۲۴($۲^{۱۰}$) باقی می‌ماند.

۱۵- با توجه به جدول مقابل در خانه مورد نظر حرف G می‌تواند باشد.



۱۶- یک عدد موجود است که هر چهار رقم آن ۳ باشد. $(\frac{۴!}{۴!})$

چهار عدد موجود است که سه رقم آن ۵ و یک رقم آن ۳ باشد. $(\frac{۴!}{۳!})$

چهار عدد موجود است که سه رقم آن ۷ و یک رقم آن ۳ باشد. $(\frac{۴!}{۳!})$

شش عدد موجود است که دو رقم آن ۵ و دو رقم دیگرش ۷ باشد. $(\frac{۴!}{۲!۲!})$

و بالاخره دوازده عدد موجود است که دو رقم آن، ۳ یک رقم آن ۵ و رقم دیگرش برابر با ۷ باشد. $(\frac{۴!}{۲!})$

پس کل اعداد مورد نظر برابر با ۲۷ می‌باشد.

۱۷- اعداد را به صورت ۱۳ و e و d و c و b و a و ۱ در نظر می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$a=\frac{۱+b}{۲}+۱ \Rightarrow ۱+b=۲a-۲ \Rightarrow b=۲a-۳$$
$$b=\frac{a+c}{۲}+۱ \Rightarrow ۲a-۳=\frac{a+c}{۲}+۱ \Rightarrow a+c=۴a-۸ \Rightarrow c=۳a-۸$$
$$c=\frac{b+d}{۲}+۱ \Rightarrow ۳a-۸=\frac{۲a-۳+d}{۲}+۱ \Rightarrow ۲a-۳+d=۶a-۱۸ \Rightarrow d=۴a-۱۵$$
$$d=\frac{c+e}{۲}+۱ \Rightarrow ۴a-۱۵=\frac{۳a-۸+e}{۲}+۱ \Rightarrow ۳a-۸+e=۸a-۳۲ \Rightarrow e=۵a-۲۴$$
$$e=\frac{d+۱۳}{۲}+۱ \Rightarrow ۵a-۲۴=\frac{۴a-۱۵+۱۳}{۲}+۱ \Rightarrow ۴a-۲=۱۰a-۵۰ \Rightarrow ۶a=۴۸ \Rightarrow a=۸$$

پس جملهٔ پنجم یعنی d برابر با $۴\times۸-۱۵$ یعنی ۱۷ می‌باشد.

۱۸-

$$\begin{aligned} S=&|۱-۲|+|۳-۴| \\ &+|۱-۲|+|۴-۳| \\ &+|۱-۳|+|۲-۴| \\ &+|۱-۳|+|۴-۲| \\ &+\dots \\ &+\dots \\ &+|۴-۳|+|۱-۲| \\ &+|۴-۳|+|۲-۱| \end{aligned}$$

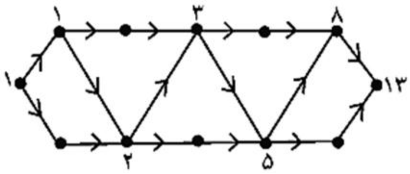
$$\Rightarrow\ S=۸\times\ |۱-۲|+|۱-۳|+|۱-۴|+|۲-۳|+|۲-۴|+|۳-۴|\ =۸۰$$

۱۹- رشته‌های مورد نظر به سه صورت ۱۰۱۰۱ x_1y_1 و $x_2y_2$۱۰۱۰۱ و $x_3$۱۰۱۰۱y_3 می‌باشند. چون برای هر کدام از x_i y_i ها دو حالت ۰ و ۱ را می‌توانیم اختصاص دهیم پس برای هر کدام از حالات فوق $۴ = ۲ \times ۲$ رشته می‌توانیم بسازیـم که در مجموع ۱۲ رشته می‌شود ولی در یک مورد رشته‌های ساخته شده در دو حالت اول باهم یکی می‌شوند و آن موقعی است که حالت زیر اتفاق بیفتد.

$x_1y_1 = ۰۱ \qquad x_2y_2 = ۱۰$

که با کسر این حالت تعداد رشته‌های مورد نشر ۱۱ رشته خواهد بود.

۲۰- تعداد طرق رسیدن به هر نقطه برابر مجموع تعداد طرقی است که به گره‌های قبل از آن می‌توان رسید. در شکل مقابل تعداد طرق رسیدن به هر نقطه بر روی آن نوشته شده است:



۲۱- مطابق با جدول زیر خانه‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم.

a	**b**	**c**	**۹**	**d**	**e**	**f**	**x**	**g**	**h**	**i**	**۷**	**j**	**k**

طبق فر داریم:

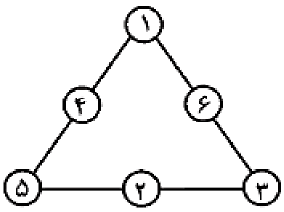
$$\begin{aligned} h + i + ۷ &= ۲۰ \\ g + h + i &= ۲۰ \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad g = ۷$$

و همچنین

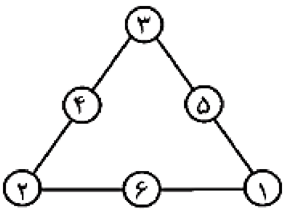
$$\begin{aligned} ۹ + d + e &= ۲۰ \\ d + e + f &= ۲۰ \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad f = ۹$$

و چون $x + g = ۲۰$ پس $x = ۴$

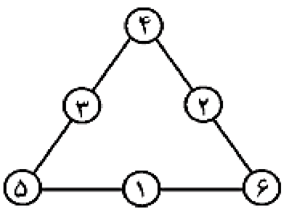
۲۲- n هر کدام از اعداد ۱۲، ۱۱، ۱۰ و ۹ می‌توانند باشند که نمونه‌ای برای هر کدام از آن‌ها در اشکال زیر مشخص است.



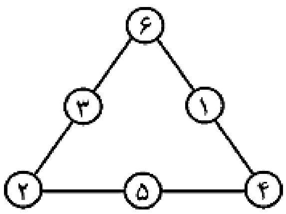
n=۱۰



n=۹



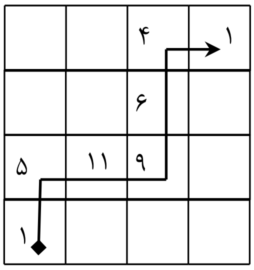
n=۱۲



n=۱۱

۲۳- واضح است که به طور متوسط $۱۰۰۰۰ \times \frac{۷۵}{۱۰۰}$ یعنی ۷۵۰۰ بار شرط $A > B$ محقق می‌شود. پس به طور متوسط F، ۷۵۰۰ بار محاسبه می‌شود. از ۲۵۰۰ حالت باقیمانده بطور متوسط ۵۰ درصد $C > D$ می‌شود. پس بطور متوسط $۲۵۰۰ \times \frac{۵۰}{۱۰۰}$ بار یعنی ۱۲۵۰ بار مقدار G محاسبه می شود.

۲۴- کوتاه‌ترین مسیر در شکل زیر نشان داده شده است که مجموعه اعداد مورد نظر برابر با ۳۷ می‌باشد.



۲۵- خانه‌های جدول را مطابق شکل نام‌گذاری می‌کنیم. خواهیم داشت:

۱۲	۷	x
b	a	۳
e	d	c

$$x+۳+c=۳+a+b \;\Rightarrow\; b-c=x-a$$
$$a+c+۱۲=a+b+۳ \;\Rightarrow\; b-c=۹ \;\Rightarrow\; x-a=۹$$
$$a+d+۷=x+۷+۱۲ \;\Rightarrow\; d=۱۲+x-a=۲۱$$
$$۳+a+b=۷+a+d \;\Rightarrow\; b=۲۸-۳=۲۵$$
$$x+a+c=۱۲+b+c \;\Rightarrow\; x+a=۱۲+۲۵=۳۷$$

با مقایسه با تساوی $x-a=۹$ تساوی‌های $x=۲۳$ و $a=۱۴$ حاصل خواهند شد. پس جدول به شکل روبه‌رو خواهد شد.

۱۲	۷	۲۳
۲۵	۱۴	۳
۵	۲۱	۱۶

۲۶- به ازای $j=۱,۲,...,۱۶$ خواهیم داشت:

$A(۱)=۰$ $\quad A(۲)=۱$ $\quad A(۳)=۳$
$A(۴)=۲$ $\quad A(۵)=۶$ $\quad A(۶)=۷$
$A(۷)=۵$ $\quad A(۸)=۴$ $\quad A(۹)=۱۲$
$A(۱۰)=۱۳$ $\quad A(۱۱)=۱۵$ $\quad A(۱۲)=۱۴$
$A(۱۳)=۱۰$ $\quad A(۱۴)=۱۱$ $\quad A(۱۵)=۹$
$A(۱۶)=۸$

غلط بودن گزینه‌های الف، د و هـ واضح است. برای به دست آوردن $A(۲^n+۱)$ $A(۲^{n+1})$ باید $A(۲^n)$ $A(۱)$ را (نه به ترتیب) با مقدار ثابت ۲^n جمع کرد. پس اگر $A(۲^n)$ $A(۱)$ عضو تکراری نداشته باشد به استقراء معلوم می‌شود که $A(۲^n+۱)$ $A(۲^{n+1})$ نیز عضو تکراری نخواهد داشت، ضمن اینکه به عنوان مثال از $A(۱)$ $A(۸)$ عضو تکراری وجود ندارد (پایهٔ استقراء). پس گزینهٔ ج نیز غلط می‌باشد.

و اما گزینهٔ ب صحیح است. استدلال، مشابه استدلال فوق است چون هر دو عدد متوالی از $A(۱)$ $A(۸)$ در مبنای ۲ دقیقاً در یک رقم متفاوت هستند. پس اگر آنان را با $۲^۳$(در مبنای ۲ به صورت ۱۰۰۰) جمع کنیم فقط رقم آخر از سمت چپ آنان از صفر به ۱ تغییر خواهد یافت...

۲۷- از عدد ۰۰۰ تا ۹۹۹ مجموعاً ۳۰۰۰ رقم به کار رفته است چون از هر رقم به تعداد یکسانی به کار رفته است پس از ۰ تا ۹۹۹ مجموعاً $\frac{۳۰۰۰}{۱۰}$یعنی ۳۰۰ رقم ۱ به کار رفته است به همین ترتیب از ۱۰۰۰ تا ۱۹۹۹ به تعداد $۳۰۰ + ۱۰۰۰$مرتبه رقم ۱ به کار رفته است. از ۲۰۰۰ تا ۲۹۹۹ نیز ۳۰۰ مرتبه رقم ۱ بکار رفته است. پس مجموعاً از ۲۹۹۹ به تعداد ۱۹۰۰ بار رقم ۱ به کار رفته است. از ۳۰۰۰ تا ۳۲۰۰ مجموعاً ۱۴۰ بار رقم ۱ به کار رفته است. پس تعداد صفحات کتاب در همین محدوده قرار دارد.

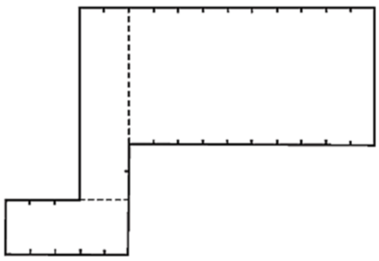
۲۸- در یک شبکه $m\times n$ برای رفتن از گوشهٔ سمت چپ و پایین به گوشهٔ سمت راست و بالا با شرائط مسئله (جهت حرکت فقط به سمت راست یا بالا) $\frac{(m+n)!}{m!n!}$مسیر وجود دارد. زیرا اگر حرکت به سمت بالا را با U و حرکت به سمت راست را با R نمایش دهیم

تعداد مسیرها برابر با تعداد حالات چیدن m عدد U و n عدد R در پیش همدیگر می‌باشد که برابر با $\frac{(m+n)!}{m!n!}$می‌باشد. در این مسأله از C به B مجموعاً $\frac{۱۱!}{۴!۷!}$ مسیر و از A به C مجموعاً $\frac{۳!}{۲!۱!}$مسیر وجود دارد. همین طور تعداد مسیرهای موجود بین C و D برابر با $\frac{۶!}{۲!۴!}$ و تـعداد مسیرهای بین D و B باربر با $\frac{۵!}{۲!۳!}$ می‌باشد. لذا تعداد مسیرها با شرائط مسئله برابر خواهد بود با:

$$\frac{۳!}{۲!۱!}\times\left[\frac{۱۱!}{۴!۷!}-\frac{۵!}{۲!۳!}\times\frac{۶!}{۲!۴!}\right]=۵۴۰$$

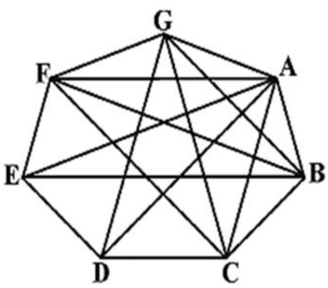
۲۹- باغ به شکل زیر می‌باشد، اگر آن را به سه مستطیل تقسیم کنیم مساحت آن برابر خواهد بود با:

$$۵\times۱۰+۲\times۷+۲\times۵=۷۴$$



۳۰- قطرهای گذرنده، از رأس A را در نظر می‌گیریم. این قطرها بر روی قطرهای BG، BF، BE، GC، GD و CF به ترتیب ۲،۳،۲،۳،۴ و ۲ نقطهٔ تلاقی ایجاد می‌کنند و در نتیجه تعداد مثلث‌های مورد نظر متناظر به رأس A برابر خواهد بود با:

$$\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}=۱۵$$



پس تعداد کل مثلث‌های مورد نظر برابر با ۱۵×۷ یعنی ۱۰۵ مثلث خواهد بود.

۳۱- اگر داخلی‌ترین شاخهٔ مارپیچ را x عدد چوب کبریت در نظر بگیریم تعداد کل چوب کبریت‌ها پس از n پیچ برابر خواهد بود با:

$$m = \underbrace{(x-۱)}_{\text{مرحله اول}} + \underbrace{(۲+x)}_{\text{مرحله دوم}} + \underbrace{(۳+x+۱)}_{\text{مرحله سوم}} + \underbrace{(۴+x+۲)}_{\text{مرحله چهارم}} + \ldots + \underbrace{(n+x+n-۲)}_{\text{مرحله nام}}$$

$$\Rightarrow \quad m = nx + n(n-۱) \quad \Rightarrow \quad ۸۷ = n(x+n-۱) - ۱ \quad \Rightarrow \quad n(x+n-۱) = ۸۸$$

۸۸ را به سه نوع می‌توان به صورت حاصل ضرب عوامل مثبتش نوشت:

$I.\ ۸۸ = ۲ \times ۴۴$

$II.\ ۸۸ = ۴ \times ۲۲$

$III.\ ۸۸ = ۸ \times ۱۱$

پس در هر مورد خواهیم داشت:

$I.\ n(x+n-۱) = ۲ \times ۴۴ \quad \Rightarrow \quad n = ۲\ ,\ x = ۴۳$

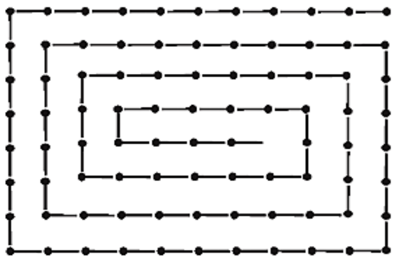
در این حالت مستطیل مورد نظر ۴۳×۱ خواهد بود:

$II.\ n(x+n-۱) = ۴۴ \times ۲ \quad \Rightarrow \quad n = ۴\ ,\ x = ۱۹$

در این حالت مستطیل مورد نظر ۲۱×۳ خواهد بود:

$III.\ n(x+n-۱) = ۸ \times ۱۱ \quad \Rightarrow \quad n = ۸\ ,\ x = ۴$

در این حالت مستطیل مورد نظر ۱۰×۷ خواهد بود که یکی از جواب‌ها است و جواب مورد نظر مسأله همین حالت بوده است. برای این حالت شکل زیر رسم شده است:



۳۲- ارزش سکه‌ها به ترتیب برابر با ۲، ۴، ۱۱ می‌باشند که در بار اول برای تشکیل ۲۸ ریال از هر کدام از دو سکه اول یک عدد و از سکه دوم دو عدد استفاده شده است. در بار دوم برای تشکیل ۲۱ ریال از سکهٔ اول سه عدد و از هر کدام از سکه‌های دیگر یک عدد استفاده شده است.

۳۳- در ابتدا باید ۳ جعبه از ۱۰ جعبه فوق را انتخاب کنیم تا خالی باشند. قرار دادن ۱۰ توپ در ۷ جعبه به طوری که در هر جعبه حداقل یک توپ باشد برابر با تعداد جواب معادلهٔ:

$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ + x_۷ = ۱۰$ در مجموعه اعداد طبیعی می‌باشد که برابر است با $\binom{۹}{۶}$. پس تعداد حالات مطلوب برابر با $\binom{۱۰}{۳}\binom{۹}{۶}$ می باشد که حاصل آن با $۵!\binom{۹}{۳}$ مساوی است.

۳۴- تعداد سیب‌ها در هر کدام از سبدها را در مرحلهٔ اول k می‌گیریم. اگر تعداد سیب‌ها در هر کدام از سبدها را در انتها برابر با x، $\frac{x}{۲}$ و $\frac{x}{۳}$ در نظر بگریم خواهیم داشت:

$x+\frac{x}{۲}+\frac{x}{۳}=۳k \Rightarrow ۱۱x=۱۸x$

کم‌ترین مقداری که x و k به خود می‌پذیرند به ترتیب برابر با ۱۸ و ۱۱ می باشد. یعنی در ابتدا تعداد سیب‌ها در هر کدام از سبدها برابر با ۱۱ بوده است. بدیهی است که غیر از این حالت جواب دیگری وجود ندارد چرا که اختلاف k و x حداکثر باید ۷ باشد (چون بعد از سه مرحله به تعداد سیب‌های یک سبد حداکثر ۷ سیب اضافه شده است) در صورتی که اگر $x>۱۸$ باشد در این صورت اختلاف x و k بیشتر از ۷ می‌شود.

۳۵- در هر مرحله مقدار ثبات را می‌نویسیم:

۱) $?=b$
۲) $?=bc$
۳) $t_۱=bc$
۴) $?=bc+a$
۵) $t_۲=bc+a$
۶) $?=(\mathrm{bc}+\mathrm{a})^۲$
۷) $?=(\mathrm{bc}+\mathrm{a})^۲+bc$
۸) $z=(\mathrm{bc}+\mathrm{a})^۲+bc$

۳۶- در هر مرحله مقدار ثبات را می‌نویسیم:

۱) $?=a$
۲) $?=a+b$
۳) $x=a+b$
۴) $?=(a+b)^۲$
۵) $z=(a+b)^۲$
۶) $?=(a+b)^۲+(a+b)$
۷) $?=a(a+b)^۲+a(a+b)$
۸) $?=\left[a(a+b)^۲+a(a+b)\right](a+b)^۲=a(a+b)^۴+a(a+b)^۳$

۳۷- در میان اعداد یک رقمی فقط عدد ۱ چنین خاصیتی را دارد که نمایش صفرشماری آن ۰ می‌باشد. در میان اعداد دو رقمی اعداد ۰۱ و ۱۰ چنین خاصیتی را دارند که نمایش صفرشماری آنان به ترتیب برابر با ۱۰ و ۰۱ می‌باشند. در میان اعداد سه رقمی اعداد ۰۰۱، ۰۱۰، ۱۰۰ چنین خاصیتی را دارند که نمایش صفرشماری آنان به ترتیب برابر با ۱۱۰، ۱۰۱ و ۰۱۱ می‌باشند.
پس در مجموع ۶ عدد دارای خاصیت مورد اشاره می باشد

۳۸- تمام اعدادی که از n صفر و یک ۱ تشکیل شده باشند چنین خاصیتی را دارند پس ∞ عدد با خاصیت مورد نظر وجود دارد.

۳۹- خروجی برنامه بعد از مرحلهٔ ۱.۱.۱ـ و خروجی نهایی برای $i=۱,۲,۳,۴,۵,۶$ در جدول زیر آمده است:

	A(۱)	A(۲)	A(۳)	A(۴)	A(۵)	A(۶)
	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$i=۱$	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	۲	۳	۴	۵	۶	۱
$i=۲$	۲	۳	۱	۵	۶	۴
	۳	۲	۵	۶	۴	۱
$i=۳$	۳	۲	۱	۶	۴	۵
	۳	۲	۶	۴	۵	۱
$i=۴$	۳	۲	۱	۴	۵	۶
	۳	۲	۴	۵	۶	۱
$i=۵$	۳	۲	۱	۵	۶	۴
	۳	۲	۵	۶	۴	۱
$i=۶$	۳	۲	۱	۶	۴	۵
	۳	۲	۶	۴	۵	۱

همانطور که مشاهده می‌شود خروجی برنامه به ازای $i=۲$ و $i=۵$ با یکدیگر، و همچنین خروجی برنامه به ازای $i=۳$ و $i=۶$ نیز با یکدیگر برابر می‌شوند. یعنی خروجی برنامه برای $i=۳k\ (k\geq ۲)$ همان خروجی برنامه به ازای $i=۳$ و خروجی برنامه برای $i=۳k+۱\ (k\geq ۲)$ همان خروجی برنامه به ازای $i=۴$ و بالاخره خروجی برنامه برای $i=۳k+۲\ (k\geq ۱)$ همان خروجی برنامه به ازای $i=۲$ می‌باشد و چون $۱۳۷۵=۳k+۱$ پس خروجی برنامه به ازای $i=۱۳۷۵$ همان خروجی برنامه به ازای $i=۴$ می‌باشد، فلذا عدد ۶ در خانهٔ پنجم قرار دارد.

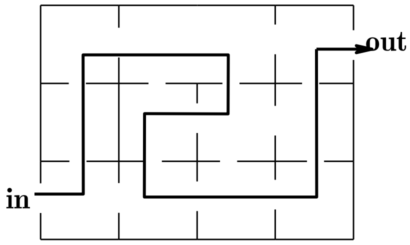
۴۰- گزینهٔ الف درست است، زیرا همان a و b هر دو متقارن هستند. اگر S متقارن باشد، آنگاه $S'=\mathrm{aSa}$ و یا $S'=b\mathrm{Sb}$ نیز متقارن خواهد بود.

گزینهٔ ب نادرست است زیرا aaa رشتهٔ مخصوص است و تفاوت تعداد aها با تعداد bها برابر با ۱ نیست.

گزینهٔ ج نادرست است. به عنوان مثال‌های نقض می‌توان به رشته های مخصوص baaab و babab اشاره کرد که هیچ کدام به صورت waw یا wbw نیستند.

پس معلوم می‌شود که در نهایت گزینهٔ الف درست است.

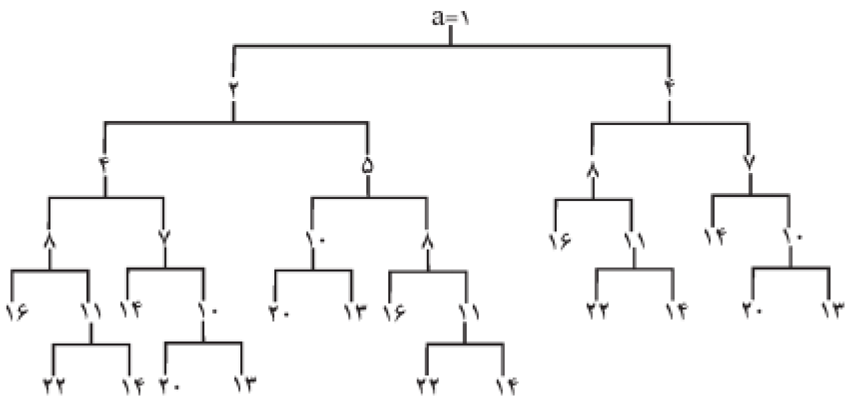
۴۱- مسیر مورد نظر در شکل زیر مشخص است.



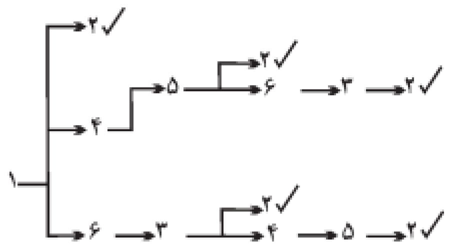
۴۲- اگر یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد آنگاه هر چهار نفر A، B، C و D اظهار نظر درستی کرده‌اند.

حالت اول	حالت دوم
x: راستگو	x: دروغگو
y: دروغگو	y: راستگو
z: راستگو	z: دروغگو
w: دروغگو	w: راستگو

۴۳- نمودار زیر را به ازای $a = ۱$ رسم می‌کنیم هر کجا خروجی بزرگ‌تر از ۱۲ شد آن شاخه را ادامه نمی‌دهیم:

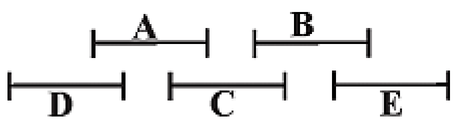


۴۴- در نمودار زیر جواب مشخص است:

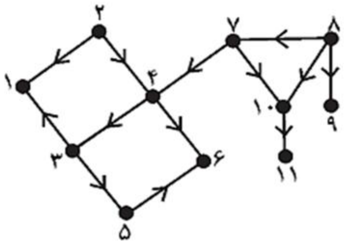


۴۵- اگر a یا b در ضلع x همسایه باشد بدیهی است که در شمارش تعداد اضلاعی که باعث همسایگی دو خانه شده اند اضلاعی مانند x دوبار حساب می‌شوند. پس اگر تعداد کل اضلاع ۷ خانه را که باعث همسایگی آنان با خانه‌های علامت‌گذاری شدهٔ دیگر شده‌اند را بشماریم باید زوج باشد. پس هر کدام از ۷ خانه نمی‌تواند با تعداد فردی از خانه‌های علامت‌گذاری شده همسایه باشد. زیرا تعداد ۷ تا عدد فرد هرگز زوج نمی‌شود.

۴۶- شکل زیر نمودار ساعت کاری آن پنج نفر را نشان می‌دهد:

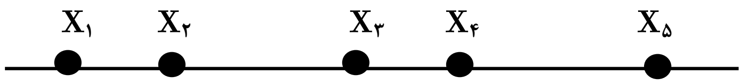


۴۷- کارها را مطابق شکل از ۱ تا ۱۱ شماره‌گذاری می‌کنیم و در هر ساعت کاری که هر کدام از دو نفر باید انجام بدهند را مشخص می‌کنیم:



	نفر اول	نفر دوم
ساعت اول :	۲	۸
ساعت دوم :	۷	۹
ساعت سوم :	۱۰	۴
ساعت چهارم :	۱۱	۳
ساعت پنجم :	۵	۱
ساعت ششم :	۶	

۴۸- نقاط را از چپ به راست $x_۱,x_۲,x_۳,x_۴$ $x_۵$ می‌نامیم. در این صورت مجموع دو به دوی آن‌ها برابر خواهد بود با:



$$(i \neq j)\sum_{ij} x_i x_j = ۴x_۱x_۲ + ۶x_۲x_۳ + ۶x_۳x_۴ + ۴x_۴x_۵$$
$$= ۲(۲x_۱x_۲ + ۳x_۲x_۳ + ۳x_۳x_۴ + ۲x_۴x_۵ = ۱+۲+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹ = ۴۷$$

در تساوی فوق سمت راست عددی فرد و سمت چپ عددی زوج است. پس تساوی هرگز برقرار نیست.

۴۹- اعداد ازصفر تا ۱۲۷ در مبنای ۲ به صورت ۰۰۰۰۰۰۰ تا ۱۱۱۱۱۱۱ نمایش داده می‌شوند. به جای نوشتن این ۱۲۸ عدد به ترتیب صعودی، کافی است آنان را چنان نوشت که هر دو عدد متوالی دقیقاً در یک رقم متفاوت باشند. در این صورت اگر اعداد به‌دست آمده یک در میان در یک رقم متفاوت باشند در این صورت اگر اعداد به دست آمده یک در میان در یک دسته و باقی‌مانده اعداد را در دسته دیگر قرار دهیم مسلم است که در یک دسته هیچ دو عدد پیدا نـمی‌شود که دقیقاً در یک رقم با هم تفوت داشته باشند. یا به طریق دیگر می‌توان مسئله را بیان کرد به این صورت که اعدادی که دارای تعداد زوجی «۱» هستند را در یک دسته و اعدادی که دارای تعداد فردی «۱» هستند را در دسته دیگر قرار می‌دهیم. بدیهی است که در یک دسته هرگز دو عدد نمی‌توان یافت که دقیقاً در یک رقم با هم تفاوت داشته باشند. زیرا چنین دو عددی در تعداد یک‌هایشان فقط یک واحد اختلاف دارند.

۵۰- اگر جدول اتمام بازی‌ها به شکل مقابل باشد بدیهی است که B قهرمان می‌شود. (تیم‌های نوشته شده در جدول یعنی تلاقی یک سطر با ستون نشانگر تیم برندهٔ آن بازی است و «ـ» نشانگر آن است که در بازی آن سطر و ستون برنـده و بازنده‌ای وجود ندارد و نتیجه بازی تساوی است.

	A	B	C	D	E	امتیاز
A		A	A	D	E	۲
B	A		B	—	B	۲/۵
C	A	B		C	C	۲
D	D	—	C		—	۲
E	E	B	C	—		۱/۵

۵۱- تعداد حالاتی که در بازی A حداقل یکبار ۱ بیاید برابر است با:
تعداد حالاتی که دوبار یک بیاید + تعداد حالاتی که دقیقاً یک بار یک بیاید:

$$=\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix}+۱=۱۱$$

پس احتمالاً برد در بازی A برابر $\frac{۱۱}{۶^۲}$ می‌باشد.

تعداد حالاتی که در بازی B حداقل دوبار ۱ بیاید برابر است با:

تعداد حالاتی که چهار بار یک بیاید + تعداد حالاتی که دقیقاً سه بار یک بیاید + تعداد حالاتی که دقیقاً ۲ بار یک بیاید:

$$\left[\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}\times ۲\right]+\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۱}+\binom{۴}{۴}\binom{۵}{۰}=۱۶۳$$

پس احتمالاً برد در بازی B برابر $\frac{۱۶۳}{۶^۴}$ می‌باشد.

چون $\frac{۱۱}{۶^۲}<\frac{۱۶۳}{۶^۴}$ پس احتمالاً برد در بازی A بیشتر است.

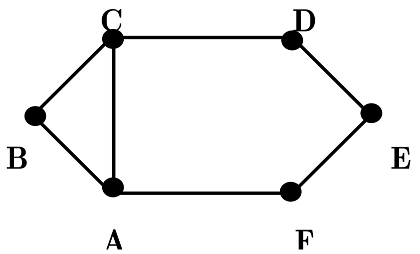
۵۲- حداکثر ۱۰ مجموعه با خاصیت مورد نظر می‌توان پیدا کرد (زیرمجموعه های ۲ عضوی یا زیرمجموعه های سه عضوی مجموعه).

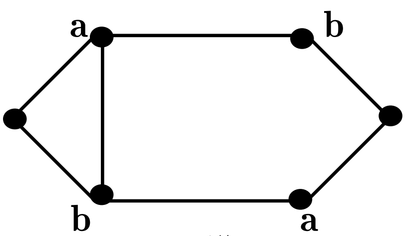
۵۳- زیرا قسمت آخر (پنجم) مسیر مورد نظر باید آبی بوده و به D ختم شود که تنها مسیر CD می‌باشد. قسمت ماقبل آخر (چهارم) مسیر مورد نظر باید قرمز بوده و به C ختم شود که تنهـا مسیر DC این خاصیت را دارد و اما هیچ مسیر جدیدی (آبی رنگ) وجود ندارد که به D ختم شده باشد.

تذکر، اگر مجاز باشیم از یک خط دو بار عبور کنیم آنگاه جواب این مسأله مثبت است و مسیر مورد نظر به صورت زیر می‌باشد:

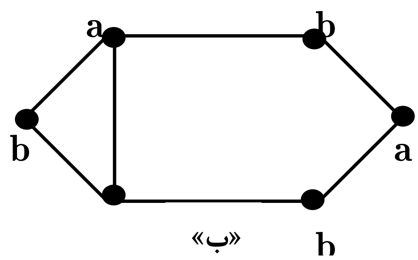
$$A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow D\longrightarrow C\longrightarrow D$$

۵۴- معلوم است که در هر حال از سه رأس A، B و C دقیـقـاً دو رأس و از سه رأس D، E و F حداقل دو رأس قابل رنگ کردن می‌باشند؛ یعنی بازی یا بعد از رنگ کردن رأس چهارم پایان می‌پذیرد و یا بعد از رنگ کردن رأس پنجم، که به ترتیب دو شکل الف و ب به دست می آید:





«الف»



«ب»

(در حالت الف اگر به جای دو رأس A و C، دو رأس A و B و یا دو رأس B و C رنگ شوند نیز بحث عوض نمی‌شود.)

در حالت الف نفر دوم و در حالت ب نفر اول برنده می‌شود، بنابراین اگر نفر دوم کار می‌کند که رنگ دو رأس D و F متفاوت باشند، آنگاه نفر دوم برنده خواهد شد.

۵۵- بازیکن اول در ابتدا یک سنگ‌ریزه برمی‌دارد و سنگ‌ریزه‌های باقی‌مانده ۱۵ عدد می شوند. اگر بازیکن دوم i سنگ‌ریزه و بازیکن سوم j سنگ‌ریزه برداند $(۱ \le i, j \le ۲)$ بازیکن اول $۵-(i+j)$ سنگ‌ریزه بر می‌دارد $(۱ \le ۵-(i+j) \le ۳)$. اگر همین رویه را بازیکن اول ادامه دهد در انتهای بازی برنده می‌شود.

۵۶- اعدادی که در زیر هم نوشته شده‌اند متناظر می‌نامیم. پس مجموعاً پنج جفت عدد متناظر داریم. از پنج جفت عدد موجود، تعداد جفت‌هایی که یکی از اعضائشان فرد و یکی از اعضائشان زوج می‌باشد زوج است. پس مجموع قدرمطلق تفاضل‌هایشان زوج می‌باشد (چون مجموع تعداد زوجی از اعداد فرد، زوج می‌شود) مجموع قدرمطلق تفاضل‌های بقیهٔ جفت اعداد نیز زوج می‌باشد. پس مجموع مورد نظر همیشه زوج است.

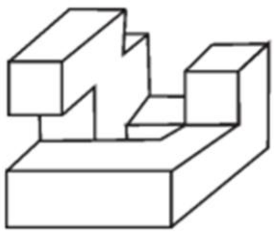
۵۷- اگر در دو خانهٔ متوالی عدد یکسانی، شد آنگاه حاصل ضرب آن دو عدد متوالی مربع کامل خواهد شد، بنابراین در هر دو خانه متوالی دو عدد متمایز وجود دارد. به همین ترتیب در هر چهار خانه متوالی نمی‌توان دقیقاً دو عدد چید، زیرا در این صورت از هر یک دقیقاً دوتا وجود دارد (اگر از یکی سه تا و از دیگری یک عدد، باشد آنگاه حداقل دو تا از آن سه تایی مجاور هم خوانده شد که خلاف حالت قبل است.) که حاصل ضربشان مربع کامل می‌شود. پس معلوم می‌شود در هر چهار خانه متوالی هر سه عدد به کار رفته اند. بنابراین در ۸ خانه اول ۳ تا a، ۳ تا b و ۲ تا c به کار رفته است. (a، b و c همان اعداد ۲، ۳ و ۵ می‌باشند ولی نه لزوماً به همان ترتیب) معلوم است که یکی از cها در یکی از چهار خانه اول قرار دارد بنابراین با توجه به این که در هر چهار خانه متوالی c وجود دارد:

I) اگر c در خانه اول و یا دوم باشد آنگاه در یکی از خانه‌های هفتم و هشتم a و در دیگری b وجود دارد که با حذف آن دو، حاصل ضرب اعداد موجود در ۶ خانه اول مربع کامل خواهد شد.

II) اگر c در خانه سوم باشد، آنگاه با حذف دو خانه اول و دوم یکی از آن‌ها a را شامل است و دیگری b را، حاصل ضرب اعداد موجود در شش خانه سوم تا هشتم مربع کامل خواهد شد.

با توجه به حالت‌بندی‌های فوق توزیع اعداد با شرایط داده شده حتی در ۸ خانه متوالی نیز نامکن است.

۵۸- حجم مورد نظر مطابق شکل زیر می‌باشد.



۵۹- اگر سکه‌ها را از سمت چپ به ترتیب A، B، C، D، E، F، G و H نشان دهیم، ترتیب حرکات به شرح زیر می‌باشد:

A B C D E F G H

ابتدا D بر روی G قرار می‌گیرد. سپس F بر روی B قرار می‌گیرد (چون D از جای خودش حذف شده است). در حرکت سوم E بر روی H قرار می‌گیرد. (با عبور کردن از روی دو سکهٔ G و D) و در نهایت C با عبور کردن از روی دو سکهٔ B و F بر روی A قرار می‌گیرد.

۶۰- از ظرف مجموعاً ۱۲ مداد برداشته شده است پس باید معادلهٔ $۴x+۲y+z=۱۲$ را حل کنیم که در آن x، y و z هر کدام برابر با یکی از اعداد ۱، ۲ و ۳ می‌باشند. بدیهیست که z باید زوج باشد. پس $z=۲$ و از آن جا خواهیم داشت $۲x+y=۵$. که جواب منحصر به فرد $y=۳$ و $x=۱$ را داراست. آن که دو مداد در اختیار دارد (b) از درون ظرف به همان تعدادی که مداد در دست دارد برداشته است پس شیء الف را در اختیار دارد. آن که سه مداد در اختیار دارد (c) دو برابر تعداد مدادهای موجود در دستش را از ظرف برداشته است پس شیء ب را در اختیار دارد. و بالاخره a شیء ج را در اختیار دارد.