



دفترچه سؤالات

مرحله اول

سهمین دوره میاد کامپیوتر سال ۱۳۹۱

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سؤالات	
	مسأله‌های تشریحی	سؤالات چند گزینه‌ای
۲۰۰	۵	-

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۵ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۲۰۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سؤالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- مجموعه‌ی اعداد صحیح ۱ تا n مفروضند.

(الف) به چند طریق می‌توان سه عدد از میان آن‌ها انتخاب کرد که تشکیل یک تصاعد اکیدا صعودی بدهند؟

(ب) به چند طریق می‌توان k عدد از میان آن‌ها انتخاب کرد که تشکیل یک تصاعد اکیدا صعودی بدهند؟ ($4 \leq k \leq n$)

۲- تعداد دنباله‌های A_1, A_2, \dots, A_k را که شرایط زیر صدق می‌کنند به دست آورید.

$$A_i \subseteq 1, 2, \dots, n \quad 1 \leq i \leq k$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = 1, 2, \dots, n$$

به عنوان مثال به ازای $n = 2$ و $k = 2$ چهار جواب زیر را داریم:

۱. $A_1 = \emptyset$, $A_2 = 1, 2$

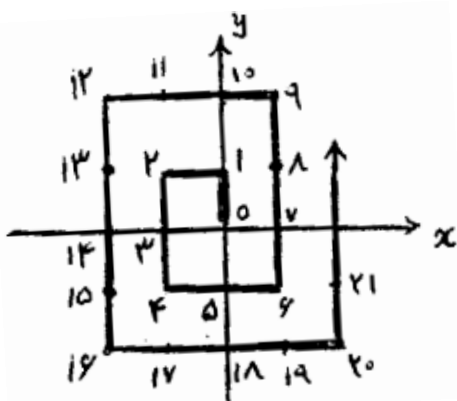
۲. $A_1 = 1, 2$, $A_2 = \emptyset$

۳. $A_1 = 1$, $A_2 = 2$

۴. $A_1 = 2$, $A_2 = 1$

۳- شکل زیر تابع $f: Z \times Z \rightarrow N$ را معرفی می‌کند ($N = 0, 1, 2, \dots$ و $Z = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$).

به عنوان مثال داریم: $f(1, -1) = 6$



(الف) الگوریتمی بنویسید که عدد n را از ورودی گرفته و مختصات (x, y) آن را در خروجی چاپ کند.

(ب) فرمولی ارائه دهید که مقدار n را بر حسب x و y داده شده به دست آورد. (الگوریتم لازم نیست).

۴- n فرد با نام‌های a_1, \dots, a_n هر کدام خبری را در اختیار دارند. خبر فرد i ام را b_i می‌نامیم. توجه کنید که b_i ها در

حالت کلی باهم متفاوتند.

دو نفر می‌توانند با هم تماس بگیرند. اگر a_i با a_j تماس بگیرد و a_i قبل از تماس خبرهای β_i و a_j خبرهای β_j را داشته باشند (β_i و β_j) مجموعه‌هایی از خبرهای اولیه b_i ها هستند. پس از تماس، هر دو دارای خبرهای $\beta_i \cup \beta_j$ خواهند شد. به عبارتی خبرهای خود را به یکدیگر منتقل می‌کنند.

یک مرحله از خبرپراکنی، تماس هم‌زمان و دو به دو این n نفر با هم می‌باشد. توجه کنید که در یک مرحله از خبرپراکنی یک فرد نمی‌تواند با بیش از یک نفر دیگر تماس بگیرد.

هدف مسئله این است که پیدا کنیم در چند مرحله و چگونه می‌توان خبرهای اولیه b_i ها را در اختیار همه‌ی a_i ها قرار داد. (الف) اگر $n = 7$ باشد حداقل تعداد مراحل برای خبرپراکنی را به دست آورید و نیز نشان دهید که در هر مرحله چه افرادی باید با هم تماس بگیرند.

(ب) حداقل تعداد مراحل را برای $n = 2k$ به دست آورده اثبات نمایید. (نحوه‌ی ایجاد تماس‌ها در این قسمت خواسته نشده است).

۴ - I : ۳ وارد پشته می شود.

۵ - I : ۴ وارد پشته می شود.

۶ - O : پشته خالی می شود (ابتدا ۴ و سپس ۳ از پشته خارج می شوند).

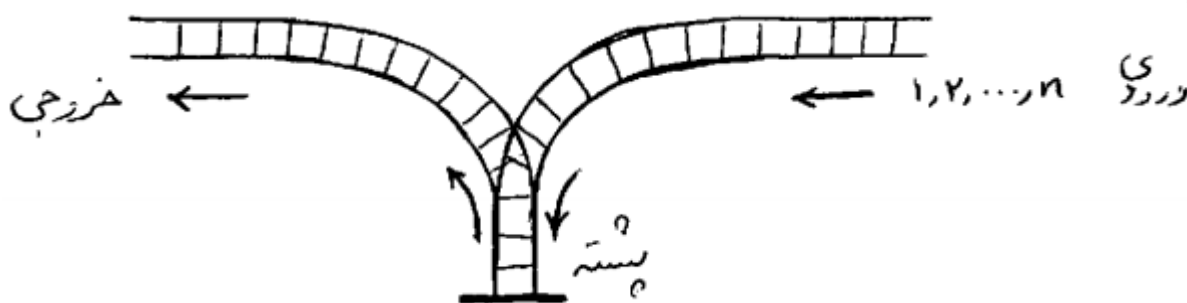
(الف) نشان دهید که آیا دنباله‌ی $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$ قابل تولید از دنباله‌ی $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$ می باشد یا خیر؟ دنباله‌ی $۳, ۲, ۱, ۵, ۴, ۶$ چطور؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، ترتیب انجام اعمال I و O را مشخص کنید. در غیر این صورت ادعای خود را ثابت کنید.

(ب) اگر t_n تعداد دنباله‌های قابل تولید از دنباله‌ی $۱, ۲, \dots, n$ باشد، t_n را به صورت یک فرمول صریح بر حسب n محاسبه نمایید. (الگوریتم لازم نیست).

(ج) یک جایگشت a_1, \dots, a_n از اعداد ۱ تا n از اعداد ۱ تا n داده شده است. برنامه‌ای بنویسید که مشخص کند آیا این دنباله قابل تولید از دنباله‌ی $۱, ۲, \dots, n$ است یا خیر. اعداد دنباله به ترتیب چپ به راست به صورت ورودی به برنامه‌ی شما داده می شود. خروجی باید در صورت قابل تولید بودن دنباله، کلمه‌ی YES و سپس رشته‌ای از I و O باشد به طوری که با انجام این اعمال، به ترتیب، بتوان دنباله‌ی مورد نظر را تولید کرد. اگر دنباله قابل تولید نباشد خروجی برنامه‌ی شما باید کلمه‌ی NO باشد.

(د) در این بند فرض کنید که هر عمل O ، خرج نمودن فقط یک واگن از پشته است (و نه تمامی آن‌ها). در این صورت اگر S_i تعداد دنباله‌های قابل تولید از دنباله‌ی $۱, ۲, \dots, i$ باشد، S_i را به صورت فرمولی بر حسب i ، $(i < n)$ ، محاسبه نمایید. (الگوریتم لازم نیست).

۵- در یک ایستگاه قطار ریلی به شکل زیر وجود دارد:



در سمت ورودی صفی از n واگن با شماره‌های ۱ تا n به دنبال هم و به ترتیب شماره‌هایشان قرار دارند، به طوری که واگن شماره‌ی ۱ در ابتدا و واگن شماره‌ی n در انتهای صف قرار دارند. قسمتی که در شکل پشته نامیده شده است بنیست است و واگن‌ها می توانند به ترتیب از ورودی وارد پشته شده و از طریق خروجی خارج شوند. پشته به اندازه‌ی کافی طولانی است و می تواند همه‌ی واگن‌ها را در خود جای دهد. بدیهی است که اگر تعدادی واگن به ترتیب وارد پشته شوند، قطاری که آخر وارد شده باشد اولین قطاری از این دسته است که خارج می شود.

نحوه‌ی حرکت واگن‌ها در این ایستگاه را با اعمال زیر می توان نشان داد:

۱. عمل I : یک واگن از ورودی وارد پشته می شود.

۲. عمل O : کلیه‌ی واگن‌ها موجود در پشته از آن به سمت خروجی خارج می شوند.

تنها اعمال فوق مجازند و توجه کنید که هیچ واگنی نمی‌تواند از خروجی به پشته و یا از پشته به ورودی بازگردد. همچنین برداشتن واگن‌ها از روی ریل مجاز نیست. با توجه به این اعمال، بدیهی است که شماره‌های واگن‌های خروجی جایگشتی از دنباله‌ی ورودی $1, 2, \dots, n$ که شماره‌های واگن‌هاست، می‌باشد.

جایگشت a_1, a_2, \dots, a_n از اعداد $1, 2, \dots, n$ را دنباله‌ی قابل تولید می‌نامیم اگر بتوان آن را با استفاده از اعمال O و I تولید کرد. به عنوان مثال دنباله‌ی $2, 1, 4, 3$ یک دنباله‌ی قابل تولید است و ترتیب اعمالی که این دنباله را تولید می‌کند به صورت زیر است:

$I - 1$: ۱ وارد پشته می‌شود.

$I - 2$: ۱ وارد پشته می‌شود.

$O - 3$: پشته خالی می‌شود (ابتدا ۲ و سپس ۱ از پشته خارج می‌شوند).