



دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی

مرحله اول

بیست و چهارمین دوره المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۳

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سؤالات	
	مساله‌های تشریحی	سؤالات چند گزینه‌ای
۱۸۰	-	۳۰

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

- ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:
- این آزمون شامل ۳۰ سؤال چند گزینه‌ای و وقت آن ۱۸۰ دقیقه است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سؤالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

- سؤال‌های ۲۵ تا ۳۰ در چند دسته‌ی سؤال‌ی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است. جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱- کاغذی به ضخامت یک دهم میلی‌متر داده شده است. این کاغذ را بیست بار تا می‌زنیم. با هر بار تا زدن ضخامت کاغذ دو برابر می‌شود. ضخامت نهایی کاغذ به کدام عدد نزدیکتر است؟ فرض کنید کاغذ به اندازه‌ی کافی برای تا زدن بزرگ است.

(الف) ۲ میلی‌متر (ب) ۱۰۰ متر (ج) ۱ متر (د) ۱۰ سانتی‌متر (ه) ۲ سانتی‌متر

۲- می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۹ را در یک جدول 3×3 بچینیم طوری که اعداد هر سطر از چپ به راست و اعداد هر ستون از بالا به پایین به صورت صعودی مرتب باشند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم، با این فرض که مکان عدد ۳ در جدول همانند شکل روبه رو از پیش تعیین شده است؟

		۳

- (الف) ۱۶ (ب) ۵ (ج) ۱۰ (د) ۱۵ (ه) ۱۷

۳- کلاس اول مدرسه‌ی محمودآباد ۱۲ دانش‌آموز دارد. معلم کلاس قصد دارد دانش‌آموزان را به سه دسته تقسیم کند و بین هر دو دانش‌آموزی که هم‌دسته نیستند، یک مسابقه برگزار کند. اگر تقسیم‌بندی طوری انجام شود که تعداد مسابقات بیشینه شود، این بیش‌ترین تعداد چند تا است؟

- (الف) ۱۸ (ب) ۲۴ (ج) ۴۲ (د) ۴۸ (ه) ۶۶

۴- روی محور اعداد حقیقی ۱۳۹۲ نقطه‌ی رنگی متمایز داده شده است که هر یک با یکی از ۹۲ رنگ موجود رنگ شده‌اند. یک بازه را «مینیمال رنگی» می‌گوییم اگر همه‌ی رنگ‌ها را پوشش دهد (یعنی از هر رنگی حداقل یک نقطه داخل آن باشد) و هیچ زیر بازه‌ای از این بازه، همه‌ی رنگ‌ها را پوشش ندهد. حداکثر تعداد بازه‌های مینیمال رنگی چند تا است؟

- (الف) ۱ (ب) ۱۳۰۱ (ج) ۹۱ (د) ۹۲ (ه) ۱۳۹۱

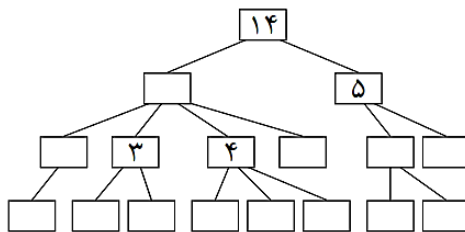
۵- ما عادت کرده‌ایم وقتی عددی را می‌بینیم آن را به طور پیش‌فرض در مبنای ده تفسیر می‌کنیم. حال تصور کنید که استفاده از مبنای ۲ تا ۱۰ به یک اندازه رایج است. در این حالت عدد ۱۲ را می‌توان به ۸ شکل مختلف (در مبنای ۳ تا ۱۰) تفسیر کرد، اما عدد ۴۵۹ تنها به یک شکل قابل تفسیر است. تعداد اعداد از ۱ تا ۱۳۹۲ (در مبنای ده) که تنها به یک شکل قابل تفسیراند، چند تا است؟ دقت کنید که اعداد تک‌رقمی تنها به یک شکل قابل تفسیراند.

- (الف) ۳۴۹ (ب) ۲۷۱ (ج) ۴۴۰ (د) ۳۵۸ (ه) ۳۴۸

۶- جدولی 1392×1392 داریم که خانه‌ی (۱,۱) آن رنگ شده است. در هر مرحله جدول را از یکی از خطوط موازی اضلاع تا می‌کنیم. در صورتی که یک خانه‌ی رنگی روی یک خانه‌ی بی‌رنگ قرار گیرد، هر دو رنگی می‌شوند. پس از هر مرحله، جدول را به حالت اولیه برمی‌گردانیم. حداقل چند حرکت لازم است تا تمامی خانه‌های جدول رنگی شوند؟

- (الف) ۱۰ (ب) ۲۰ (ج) ۲۱ (د) ۱۱ (ه) ۲۲

۷- درخت وراثت نموداری برای نشان دادن میزان ارثی است که به هر یک از اعضای یک خانواده طی سال‌ها رسیده است. فرض کنید تمام اموال هر فرد بین فرزندانش (در صورتی که فرزندی داشته باشد) تقسیم می‌شود. میزان ارث هر نفر عددی صحیح و نامنفی است. به چند طریق می‌توان درخت وراثت رو به رو را تکمیل نمود؟



۱۵۱۲ (ه)

۲۰۱۶ (د)

۳۷۸۰ (ج)

۱۱۳۴ (ب)

۴۰۳۲ (الف)

۸- روی یک خط ۱۳۹۲ درخت قرار گرفته‌اند که فاصله‌ی هر دو درخت متوالی از هم ۱۰۰ واحد است. ارتفاع درخت‌ها یک عدد صحیح از ۱ تا ۱۳۹۲ است و ارتفاع هیچ دو درختی برابر نیست. ما می‌توانیم در هر گام یکی از درخت‌ها را انتخاب کرده، آن را ببریم. هر درخت پس از بریده شدن به سمت راست می‌افتد و در صورتی که به درخت‌های دیگری برخورد کند آن‌ها را نیز خواهد انداخت. دو درخت در صورتی برخورد می‌کنند که ارتفاع درخت افتاده بیش‌تر یا مساوی فاصله‌ی دو درخت باشد. با توجه به این که اطلاعی درباره‌ی ترتیب قرار گرفتن درخت‌ها نداریم، حداقل باید چند درخت را قطع کنیم تا تمامی درخت‌ها بیافتند؟

۳۷ (ه)

۱۰۰ (د)

۵۰ (ج)

۶۹۶ (ب)

۱۲۹۲ (الف)

۹- در مسئله‌ی قبل، فرض کنید تعداد درخت‌ها ۵۰ و ارتفاع هر درخت یک عدد صحیح غیر تکراری از ۱ تا ۵۰ است. همچنین فاصله‌ی بین تمامی درخت‌ها عدد صحیح X است. در ضمن ترتیب چیدن درخت‌ها نیز در اختیار ما است. می‌خواهیم X را طوری تعیین کنیم که بتوان با یک برش تمامی درخت‌ها را انداخت. مقدار X حداکثر چند است؟

۱۷ (ه)

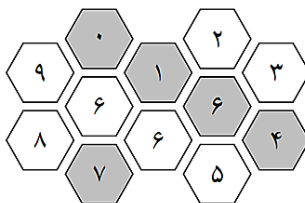
۲۰ (د)

۱۹ (ج)

۱۸ (ب)

۱۶ (الف)

۱۰- تعدادی شش‌ضلعی همانند شکل مقابل داریم که داخل هر خانه یک عدد نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان یکی از خانه‌هایی را که دقیقاً شش همسایه دارد انتخاب کرد و تمام شش‌ضلعی‌های دور آن را در جهت عقربه‌های ساعت چرخاند. می‌خواهیم مجموعه‌ی اعداد در خانه‌های خاکستری بیشینه شود. این مجموع بیشینه چند است؟ دقت کنید که در حین چرخش اعداد جا به جا می‌شوند ولی رنگ خانه‌ها ثابت می‌ماند.



۳۲ (ه)

۱۸ (د)

۲۶ (ج)

۳۰ (ب)

۳۶ (الف)

۱۱- به چند حالت می‌توان چهار وزیر را روی یک صفحه‌ی شطرنج 4×4 قرار داد طوری که یک‌دیگر را تهدید نکنند؟ دو وزیر یک‌دیگر را تهدید می‌کنند اگر هم‌سطر، هم‌ستون یا هم‌قطر باشند. فرض کنید صفحه‌ی شطرنج ثابت است و نمی‌چرخد.

۲ (ه)

۴ (د)

۸ (ج)

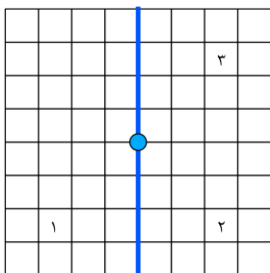
۰ (ب)

۱ (الف)

۱۲- یک صفحه‌ی شطرنج 6×6 داریم که یک مهره‌ی اسب در خانه‌ی $(1, 1)$ آن قرار گرفته است. می‌دانیم که اسب به شکل L روی صفحه حرکت می‌کند. روی هر خانه حداقل تعداد حرکات لازم برای رسیدن اسب به آن خانه را نوشته‌ایم. بزرگ‌ترین این اعداد چند است؟

- الف) ۳ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۴ (ه) ۵

۱۳- یک جدول 8×8 داریم، هر خانه یک قرینه نسبت به نقطه‌ی وسط دارد. برای مثال خانه‌ی ۳ در شکل قرینه‌ی خانه‌ی ۱ نسبت به نقطه‌ی وسط می‌باشد. همچنین هر خانه یک خانه قرینه نسبت به خط عمودی مرکزی نیز دارد. برای مثال خانه‌ی ۲ قرینه‌ی خانه‌ی ۱ نسبت به خط عمودی مرکزی می‌باشد. می‌خواهیم این جدول را با ۳ رنگ، رنگ کنیم به شرطی که هر خانه‌ی این جدول حداقل با یکی از دو خانه‌ی قرینه‌ی خود (قرینه نسبت به خانه‌ی مرکز و قرینه نسبت به خط عمودی وسط) هم‌رنگ باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

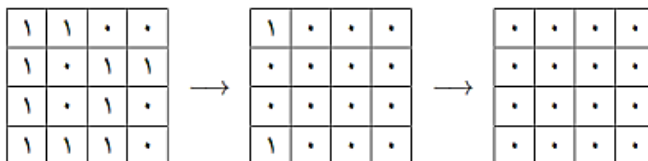


- الف) 16^{15} (ب) 3^{64} (ج) 3^{16} (د) 9^{16} (ه) 15^{16}

۱۴- برای مرتب‌سازی، عمل «ابر جا به جایی» را چنین تعریف می‌کنیم. در هر ابر جا به جایی، یک زیر رشته‌ی دلخواه از دنباله‌ی داده شده را معکوس می‌کنیم. برای مثال دنباله‌ی $\langle 1, 4, 3, 2, 5 \rangle$ با یک ابر جا به جایی مرتب می‌شود. کافی است زیر رشته‌ی $\langle 4, 3, 2 \rangle$ را معکوس کنیم. ولی برای مرتب‌سازی دنباله‌ی $\langle 4, 2, 3, 1 \rangle$ دو ابر جا به جایی نیاز داریم. ابتدا کل دنباله را معکوس می‌کنیم تا به $\langle 1, 3, 2, 4 \rangle$ برسیم. سپس زیر رشته‌ی $\langle 3, 2 \rangle$ را معکوس می‌کنیم. حداقل تعداد ابر جا به جایی که برای مرتب‌سازی هر دنباله‌ی دلخواه به طول ۴ کافی است، چند است؟

- الف) در برخی حالات مرتب‌سازی با ابر جا به جایی ممکن نیست. (ب) ۴ (ج) ۳ (د) ۲ (ه) ۵

۱۵- «جدول صفر و یک» به جدولی می‌گوییم که در هر خانه‌ی آن صفر یا یک قرار گرفته است. عملی را تعریف می‌کنیم که از روی یک جدول صفر و یک 4×4 ، یک جدول صفر و یک 4×4 ، دیگر را به این شکل می‌سازد که هر خانه‌ی جدول جدید برای حاصل ضرب خانه‌های مجاور آن خانه در جدول قدیمی است (خانه مجاور یک خانه، خانه‌ای است که با آن خانه یک ضلع مشترک دارد). برای مثال با دو بار اعمال این عمل روی جدول زیر به «جدول تمام صفر» (جدولی که تمام خانه‌های آن صفر است) می‌رسیم.



تعداد کل جدول‌های صفر و یک 4×4 که با تکرار این عمل روی آن‌ها به جدول تمام صفر نمی‌رسیم چند تا است؟

- الف) ۱۲۰ (ب) ۵۵۱ (ج) ۱ (د) ۰ (ه) ۳

۱۶- تعداد رشته‌های ۱۰ تایی از ارقام را بیابید که در هر یک از آن رشته‌ها هر رقم برابر با تعداد رقم‌های یک مجاورش باشد.

- الف) ۲۰ (ب) ۱ (ج) ۱۴ (د) ۱۲ (ه) ۲

۱۷- تعداد رشته‌های ۱۰ تایی از ارقام را بیابید که در هر یک از آن رشته‌ها هر رقم برابر با تعداد رقم‌های صفر مجاورش باشد.

- الف) ۱۴ (ب) ۱۰ (ج) ۲۲ (د) ۱۶ (ه) ۲۰

۱۸- ۱۳۹۳ بادکنک را در یک ردیف قرار داده‌ایم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از بادکنک‌ها را بترکانیم. فقط باید این شرط رعایت شود که هر بادکنکی که می‌ترکد تعداد بادکنک‌های سمت چپ و راست آن ترکیده‌اند حداکثر یکی اختلاف داشته باشد. به چند طریق می‌توانیم این بادکنک‌ها را بترکانیم؟

- الف) ۳۶۹۷ (ب) ۲۶۹۷ (ج) ۲۶۹۶ (د) ۳۶۹۶ (ه) ۲۱۳۹۳

۱۹- خیکوله و خیکولتا روی جدول 4×4 رو به رو بازی زیر را انجام می‌دهند:

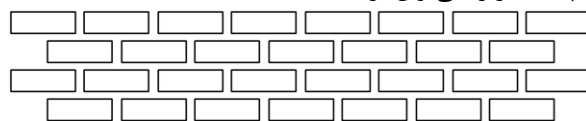
۰	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰
۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰

- ابتدا خیکوله سطرها را به دلخواه جا به جا می‌کند (سطرها را جایگشت می‌دهد).
- سپس ستون‌ها را به دلخواه جا به جا می‌کند (ستون‌ها را جایگشت می‌دهد).
- سپس خیکولتا تعداد جفت ۱های مجاور را می‌شمارد (دو خانه‌ای که ضلع مشترک دارند مجاورند) و به تعداد آن به خیکوله شکلات می‌دهد.

اگر خیکوله به بهترین نحو ممکن بازی کند چند شکلات می‌تواند به دست بیاورد؟

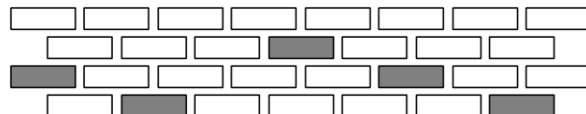
- الف) ۱۴ (ب) ۱۷ (ج) ۱۶ (د) ۱۵ (ه) ۱۳

۲۰- تعدادی آجر همانند شکل مقابل داده شده‌اند. هر آجر روی یک یا دو آجر دیگر و یا روی زمین قرار دارد. آجری که روی زمین نیست تنها زمانی می‌افتد که آجر دیگری زیرش قرار نداشته باشد. می‌خواهیم تعدادی از آجرها را برداریم طوری که آجرهای سطر بالا برداشته نشوند و هیچ آجری نیافتد. در این صورت حداکثر چند آجر را می‌توان برداشت؟



- الف) ۱۱ (ب) ۱۵ (ج) ۱۲ (د) ۱۳ (ه) ۱۴

۲۱- همانند مسئله‌ی قبل آجرهایی همانند شکل رو به رو داریم، با این تفاوت که آجرهای خاکستری نباید برداشته شوند. در این صورت حداکثر چند آجر را می‌توان برداشت؟



- الف) ۹ (ب) ۸ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

۲۲- جدولی ۱۳۹۲×۱۳۹۲ داریم. خانه‌های این جدول را به ترتیب با اعداد ۰ تا $۱ - ۱۳۹۲^۲$ به ترتیب سطری از بالا به پایین و سپس ستونی از چپ به راست شماره‌گذاری می‌کنیم. به این ترتیب خانه‌های سطر i ام با اعداد $۱۳۹۲ \times i$ تا $(i+1) \times ۱۳۹۲$ از چپ به راست شماره‌گذاری شده‌اند. دو خانه از جدول را مجاور می‌نامیم در صورتی که در یک ضلع اشتراک داشته باشند و آن ضلع توسط هیچ‌کدام از آن دو خانه بسته نشده باشد. طریقه‌ی بسته شدن اضلاع جدول این گونه است که عدد نوشته شده در خانه را به صورت دودویی می‌نویسیم. در صورتی که این عدد کم‌تر از چهار رقم داشت با گذاشتن ۰ در پشت عدد، آن را چهار رقمی می‌کنیم. حال یک بودن هر کدام از چهار رقم اول این عدد باعث بسته شدن متناظرش می‌شود. ارقام اول تا چهارم به ترتیب با ضلع‌های بالا، راست، پایین و چپ آن خانه متناظرند. (رقم اول کم ارزش‌ترین رقم در نمایش دودویی است). یک حرکت مجاز را رفتن از خانه‌ای به یکی از خانه‌های مجاورش تعریف می‌کنیم. حال جدول ساخته شده به یک مجموعه از خانه‌ها «هم‌بند» می‌گوییم اگر هر دو خانه با انجام تعدادی حرکت مجاز از یکدیگر قابل دسترسی باشند. اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه‌ی هم‌بند این جدول را محاسبه کنید.

الف) ۴۱۷۶ (ب) ۲۷۸۴ (ج) ۶۹۶۰ (د) ۵۵۶۸ (ه) ۱۳۹۲

۲۳- دنباله‌ی $(۰, ۰, ۰, ۰, ۰)$ بر روی کاغذ نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان یکی از تغییرات زیر را روی دنباله اعمال کرد:

- تمامی اعداد داخل لیست در دو ضرب می‌شوند.
 - یکی از اعداد دنباله انتخاب و به علاوه‌ی یک می‌شود.
- کم‌ترین تعداد مرحله برای رسیدن به دنباله‌ی $(۷, ۱, ۵, ۱, ۳, ۸)$ چند است؟

الف) ۱۴ (ب) ۱۸ (ج) ۱۷ (د) ۱۵ (ه) ۱۶

۲۴- مار کوچکی متشکل از ۸ مکعب به ضلع ۱ همانند شکل زیر داریم که از سر تا دم شماره‌های ۱ تا ۸ شماره‌گذاری شده‌اند. هر دو مکعب پشت سر هم با مفصل کوچکی به هم وصل شده‌اند و فقط قابلیت چرخش نسبت به یکدیگر را دارند. این مار کوچک را به چند حالت مختلف می‌توان در یک جعبه‌ی مکعبی به ضلع ۲ جا داد؟ دو حالت مختلف در نظر گرفته می‌شوند اگر دو قطعه با شماره‌های مختلف از بدن مار در یک مکان از جعبه‌ی مکعبی قرار بگیرند. یعنی اگر دو حالت با چرخش جعبه‌ی مکعبی به هم تبدیل شوند، یکسان نیستند.



الف) ۱۹۲ (ب) ۹۶ (ج) ۴۸ (د) ۶۴ (ه) ۱۴۴

برنامه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

- مقدار S را برابر با ۰ قرار بده.
- به ازای $i = ۱, ۲, \dots, X$ عملیات زیر را انجام بده:
- اگر X به i بخش‌پذیر بود، مقدار S را برابر با $S + i$ قرار بده.
- مقدار S را گزارش کن.

فرض کنید خروجی برنامه‌ی بالا برابر با $f(X)$ باشد، به طور مثال اگر X را برابر با ۴ قرار دهیم، به ازای $i = ۱, ۲$ و $i = ۴$ مقدار S افزایش پیدا می‌کند. پس مقدار $f(۴)$ برابر با ۷ خواهد بود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

۲۵- مقدار $f(441)$ برابر با چند است؟

- الف) ۳۶۲ ب) ۷۴۰ ج) ۷۶۲ د) ۳۰۰ ه) ۷۴۱

۲۶- مقدار $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)$ برابر با چند است؟

- الف) ۳۲۴۹ ب) ۸۳۵۴ ج) ۸۲۹۹ د) ۸۲۴۹ ه) ۳۲۹۹

اخيراً در پی آزمایش‌های هسته‌ای در مجمع‌الجزایر پنیر، جنگی بین دو کشور پنیر شمالی و پنیر جنوبی درگرفته است. در این مجمع‌الجزایر ۱۰ جزیره وجود دارد که این دو کشور در پی تصرف آن‌ها هستند. در این جنگ هر یک از دو کشور به هر جزیره تعدادی نیرو اعزام می‌کند و در هر جزیره کشوری که نیروی بیشتری اعزام کرده باشد، پیروز نبرد خواهد شد و اگر تعداد نیروها مساوی باشد جزیره به هیچ یک از دو کشور تعلق نخواهد گرفت. اما همه می‌دانند که کشور پنیر جنوبی با همکاری کشورهای دیگر به تکنولوژی‌ای دست یافته که می‌تواند تعداد نیروهایی که طرف مقابل به هر جزیره ارسال می‌کند را پیش‌بینی کند و بر اساس آن نیروهای خود را به جزیره‌ها بفرستد. می‌دانیم هر یک از دو کشور بهترین شیوه را برای تصاحب بیشترین تعداد جزیره به کار می‌بندند. با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

۲۷- اگر کشور پنیر شمالی ۱۰۰ نیرو و کشور پنیر جنوبی ۴۵ نیرو در اختیار داشته باشد، کشور پنیر شمالی حداکثر چند جزیره را می‌تواند تصاحب کند؟

- الف) ۵ ب) ۶ ج) ۳ د) ۷ ه) ۴

۲۸- اگر کشور پنیر جنوبی ۴۵ نیرو در اختیار داشته باشد، کشور پنیر شمالی حداقل چند نیرو باید داشته باشد تا مطمئن باشد که نیمی از جزیره‌ها را تصاحب می‌کند؟

- الف) ۶۸ ب) ۷۰ ج) ۶۹ د) ۷۳ ه) ۷۵

شش نفر دور یک میز نشسته‌اند که هر یک از آن‌ها کلاهی بر سر دارد. کلاه‌ها به رنگ‌های قرمز، آبی و سبز هستند. می‌دانیم که از هر رنگ حداقل یک کلاه وجود دارد. هر کسی می‌تواند رنگ کلاه پنج نفر دیگر را ببیند، اما توان دیدن رنگ کلاه خود را ندارد. این شش نفر بسیار باهوش هستند و در صورتی که از لحاظ منطقی امکان تشخیص رنگ کلاه خود با توجه به رنگ کلاه دیگران وجود داشته باشد، رنگ کلاه خود را تشخیص می‌دهند. برای مثال اگر شخصی هیچ کلاهی با رنگ آبی روی سر پنج نفر دیگر نبیند، متوجه می‌شود که رنگ کلاه او آبی است، چرا که می‌داند از هر رنگ باید حداقل یک کلاه، در بین کلاه‌ها موجود باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

۲۹- اگر از این شش نفر بخواهیم در صورتی که توان تشخیص رنگ کلاه خود را دارند، دست خود را هم‌زمان بلند کنند، با فرض پاسخ صادقانه حداقل و حداکثر چند نفر ممکن است دست خود را بلند کنند؟

- الف) ۲ و ۲ ب) صفر و ۶ ج) صفر و ۲ د) ۲ و ۶ ه) ۶ و ۶

۳۰- حالا پس از این پاسخ صادقانه، مجدداً از این شش نفر می‌خواهیم که در صورتی که هم اکنون رنگ کلاه خود را می‌دانند، دست خود را بلند کنند. در این حالت (باز با فرض پاسخ صادقانه) حداقل و حداکثر چند نفر ممکن است دست خود را بلند کنند؟

- الف) صفر و ۲ ب) صفر و ۶ ج) ۲ و ۲ د) ۶ و ۶ ه) ۶ و ۲

«پاسخنامه تشریحی»

۱- گزینه ی ب صحیح است.

 ضخامت نهایی کاغذ برابر است با $10^4 / 8576 = 20^2 \times 10^{-4}$ متر.

۲- گزینه ی ب صحیح است.

مکان اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ و ۹ همانند جدول رو به رو به صورت یکتا مشخص می‌شود. برای عدد ۵ دو انتخاب داریم. اگر ۵ در خانه (۱، ۳) قرار گیرد، ۶ در خانه (۲، ۲) خواهد بود و در نتیجه برای قرار دادن ۷ و ۸ دو راه وجود دارد. اگر ۵ در خانه (۲، ۲) قرار گیرد، هر یک از سه عدد دیگر می‌توانند در خانه (۲، ۳) قرار گیرند و سپس مکان دو عدد دیگر به صورت یکتا مشخص می‌شود. پس در کل به ۵ طریق می‌توان جدول را پر کرد.

۱	۲	۳
۴		
		۹

۳- گزینه ی د صحیح است.

بیشترین تعداد زمانی حاصل می‌شود که سه گروه ۴ نفره داشته باشیم. در این حالت بین هر دو گروه ۱۶ مسابقه و در مجموع $3 \times 16 - 48 = 3 \times 16 - 48$ مسابقه انجام می‌شود.

۴- گزینه ی ب صحیح است.

اگر n نقطه داشته باشیم که با یکی از k رنگ، رنگ شده باشد، جواب $n - k + 1$ خواهد شد. با توجه به تعریف بازه‌ی مینیمال رنگی، هیچ دو بازه‌ی مینیمال رنگی نقاط انتهایی یکسانی ندارند. بنابراین هر بازه‌ی رنگی را می‌توان با نقطه‌ی شروع آن به طور یکتا مشخص کرد. در ضمن نقطه‌ی شروع بازه‌ی مینیمال رنگی نمی‌تواند بین $k - 1$ نقطه‌ی پایانی باشد چرا که در هر بازه‌ی مینیمال رنگی حداقل باید شامل k نقطه باشد. در نتیجه تعداد چنین بازه‌هایی $n - k + 1$ خواهد شد. مثالی که دقیقاً این تعداد بازه‌ی مینیمال رنگی داشته باشد دنباله‌ی متناوب زیر است که هر رنگ با یکی از اعداد ۱ تا k نمایش داده شده است: $1, 2, \dots, k, 1, 2, \dots, k, 1, 2, \dots, k, \dots$

۵- گزینه ی هـ صحیح است.

باید تعداد اعدادی که حداقل یک رقم ۹ دارند را به همراه اعداد یک رقمی حساب کنیم. حالت بندی می‌کنیم.

- تعداد حالاتی که از ۱۳۹۰ کمتر نیستند: ۳
 - تعداد حالاتی که بین ۱۳۰۰ تا ۱۳۸۹ هستند: ۹
 - تعداد حالاتی که بین ۱۰۰۰ تا ۱۲۹۹ هستند: $57 = 3 \times 9 \times 9 - 3 \times 000$
 - تعداد حالاتی که بین ۱ تا ۹۹۹ هستند: $279 = 9 \times 9 \times 9 + 8 - 1000$
- که مجموع این چهار عدد جواب است.

۶- گزینه ی هـ صحیح است.

برای رنگی شدن ستون اول دست کم ۱۱ تای افقی و برای رنگی شدن سطر اول دست کم ۱۱ تای عمودی مورد نیاز است و با این تعداد نیز به سادگی می‌توان به جدولی کاملاً رنگی دست یافت.

۷- گزینه ی ج درست است.

کافی است میزان اموال افرادی را مشخص کنیم که فرزندی ندارند (برگ‌های درخت ریشه‌دار). اموال بقیه‌ی افراد به صورت یکتا مشخص می‌شود. باید زیر درخت رئوسی که مقدارشان معلوم است را به صورت جداگانه حل کنیم و برای به دست آوردن جواب نهایی جواب زیر مسئله‌ها را در هم ضرب کنیم. برای مثال برای معلوم کردن برگ‌های مربوط به رأس با عدد ۱۴ باید مقدار $2 = 3 \times 4 \times 5 \times 14$ را بین دو برگ مربوطه پخش کنیم، که این کار به سه روش ممکن است. به همین ترتیب می‌توان تعداد روش‌های حل بقیه‌ی زیر درخت‌ها را پیدا کرد. جواب نهایی برابر با $3780 = 15 \times 4 \times 3 \times 21$ می‌باشد.

۸- گزینه‌ی د صحیح است.

در صورتی که درخت‌ها به ترتیب ارتفاع قرار گرفته باشند حداقل ۱۰۰ درخت باید قطع شوند. در حالت کلی نیز با تقسیم کردن خط به بازه‌هایی که ارتفاع درخت‌ها حداقل ۱۰۰ است می‌توان با قطع اولین درخت در هر بازه آن‌ها را انداخت. پس ۱۰۰ مرحله کافی است.

۹- گزینه‌ی ه صحیح است.

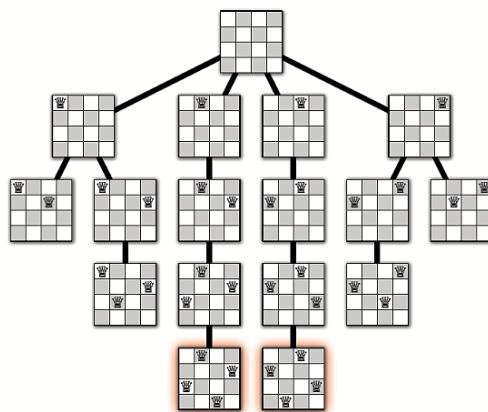
افتادن هر درخت معادل با افتادن چند درخت دیگر خواهد بود در صورتی که ارتفاع آن از X بیشتر باشد. در نتیجه باید تعداد این چنین درخت‌هایی با ضریب انداختنشان (یک درخت می‌تواند چند درخت را بیاندازد) بیشتر از ۴۹ شود که به ازای $X = 17$ چنین اتفاقی می‌افتد.

۱۰- گزینه‌ی الف صحیح است.

به جز خانه‌های وسط شش ضلعی‌ها تمامی اعداد را می‌توان به هر حالت دیگری رساند. در نتیجه می‌توان در ۵ خانه بیش‌ترین اعداد را قرار داد.

۱۱- گزینه‌ی ه درست است.

با رسم درخت حالات که در شکل زیر نمایش داده شده به عدد ۲ می‌رسیم.



۱۲- گزینه‌ی د صحیح است.

در هر حرکت می‌توان حداکثر سه واحد به هدف نزدیک‌تر شد. در صورتی که بخواهیم به خانه‌ی (۶,۶) جدول برسیم باید حداقل ۱۰ واحد حرکت کنیم که معادل حداقل ۴ حرکت اسب است. همچنین با بررسی خانه‌های نهایی جدول می‌توان مثالی آورد که با ۴ حرکت به تمام آن خانه‌ها رسید.

۱۳- گزینه‌ی ه درست است.

یک خط را به همراه قرینه‌ی آن نسبت به خط عمودی و نسبت نقطه‌ی مرکز و همچنین به همراه قرینه‌ی نسبت به خط عمودی قرینه‌ی نسبت به مرکز آن را (در مجموع چهار خانه) را در نظر می‌گیریم. این چهار خانه یا همگی هم‌رنگ هستند و یا دوتای پایین هم‌رنگ و دوتای بالا نیز هم‌رنگ می‌باشند. پس در مجموع $3 + 6 + 6$ حالت داریم و چون تعداد این چهارتایی‌ها برابر ۱۶ می‌باشد در مجموع ۱۵ به توان ۱۶ حالت داریم.

۱۴- گزینه‌ی ج صحیح است.

با حالت‌گیری و رسیدن به دنباله‌ی $(2, 4, 1, 3)$ جواب به دست می‌آید.

۱۵- گزینه‌ی ب صحیح است.

دو حالت شطرنجی صفر و یک حالت مادر هستند که هر یک 2^8 حالت را در بر دارند که یک حالت تمام یک بین آن‌ها مشترک است.

۱۶- گزینه‌ی ب صحیح است.

چند لم برای سادگی در زیر آمده است که اثبات آن‌ها دشوار نیست.

- لم ۱: هر رقم صفر یا یک یا دو است.
 - لم ۲: مجاور رقم ۲ حتماً یک است.
 - لم ۳: هر بلوک از یک‌های متوالی تنها دو رقم یک دارد.
 - لم ۴: اگر رقم صفر داشته باشیم کل رشته صفر است.
 - لم ۵: تنها رشته قابل قبول صفر است!
- پس پاسخ مسئله یک است.

۱۷- گزینه‌ی د صحیح است.

چند لم برای سادگی در زیر آمده است که اثبات آن‌ها دشوار نیست.

- لم ۱: هر رقم صفر یا یک یا دو است.
 - لم ۲: دو صفر مجاور نداریم.
 - لم ۳: مجاور رقم ۲ حتماً صفر است.
 - لم ۴: بین هر سه رقم متوالی حداقل یکی صفر است.
 - لم ۵: اگر جایگاه صفرها با خاصیت لم ۲ و ۴ مشخص شود، بقیه‌ی ارقام به طور یکتا به دست می‌آید.
 - لم ۶: به ۱۶ طریق می‌توان جایگاه صفرها را بنا بر لم ۲ و ۴ مشخص کرد.
- پس پاسخ ۱۶ صحیح است.

۱۸- گزینه‌ی ج صحیح است.

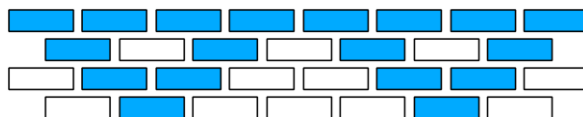
فرض کنید بادکنک ابتدا و انتها در دو حرکت اول نترکند، پس حداقل در حرکت سوم ترکیده‌اند و با توجه به این که حداقل یک طرف آن‌ها دو بادکنک ترکیده و طرف دیگر آن‌ها هیچ بادکنکی نترکیده است به تناقض می‌رسیم. پس دو حرکت اول باید دو بادکنک ابتدا و انتها باشند. به همین ترتیب باقی بادکنک‌ها نیز باید بترکند.

۱۹- گزینه‌ی ۱ صحیح است.

تعداد جفت‌های سطری و ستونی کنار هم جدا شمرده می‌شوند. سطری‌ها بهترین حالت ۷ تا و ستونی‌ها هم ۷ تا است.

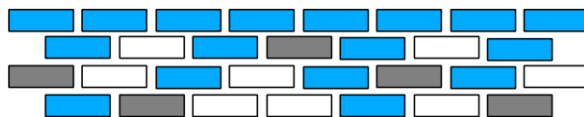
۲۰- گزینه‌ی ج صحیح است.

دو خانه‌ی گوشه‌ای جدول باید باقی بمانند و پس از نگه داشتن آن‌ها بقیه‌ی آجرها به صورت یکتا تعیین می‌گردند. در شکل مقابل آجرهایی که باید باقی بمانند با رنگ تیره و آجرهایی که می‌توان برداشت با رنگ سفید مشخص شده‌اند.



۲۱- گزینه‌ی ب صحیح است.

همانند مسئله‌ی قبلی ابتدا باید آجرهایی که باید باقی گذاشت را می‌گذاریم. سپس بین حالات ممکن که محدود است، حالتی را انتخاب می‌کنیم که بهترین نتیجه به دست آید. بهترین نتیجه همانند شکل رو به رو ۸ است.



۲۲- گزینه‌ی الف صحیح است.

با توجه به اینکه ۱۳۹۲ بر ۱۶ بخش‌پذیر است، تمامی اعضای یک ستون به یک صورت ضلع‌های مجاورشان را می‌بندند. همچنین الگوی جدول در هر ۱۶ ستون تکرار می‌شود. بنابراین کافی است تنها ۱۶ ستون اول را بررسی کنیم.

۲۳- گزینه‌ی د صحیح است.

کم‌ترین مرحله برابر است با مجموع تعداد بیت‌های ۱ در نمایش دودویی اعداد دنباله به علاوه‌ی بزرگ‌ترین X ای که بزرگ‌ترین عدد دنباله از 2^X بزرگ‌تر مساوی است. روش ساخت هم این‌گونه است که در مرحله‌ی اول اعداد که بیت ۱- X - ام آن‌ها یک است را به علاوه‌ی یک می‌کنیم و سپس کل اعداد را در دو ضرب می‌کنیم. به همین ترتیب این کار را X بار انجام می‌دهیم. در آخر نیز اعدادی که بیت ۰ - ام آن‌ها یک است، به علاوه‌ی یک می‌شوند. دقت کنید که بعد از آخرین مرحله‌ی اضافه کردن دیگر اعداد را در دو ضرب نمی‌کنیم.

۲۴- گزینه‌ی هـ صحیح است.

انتخاب سر مار (مکعب شماره‌ی ۱) ۸ حالت دارد. انتخاب مکعب دوم مستقل از اولی ۳ حالت دارد و انتخاب مکعب سوم ۲ حالت. اما بعد از مکعب سوم حالت‌ها دیگر تقارن ندارند و نمی‌توان به این صورت شمرد. اما در کل بعد از انتخاب سه مکعب اول ۳ حالت ممکن است پیش بیاید. پس جواب برابر است با: $8 \times 3 \times 2 \times 3 = 144$.

۲۵- گزینه‌ی هـ صحیح است.

عدد ۴۴۱ برابر است با $7^2 \times 3^2$ که دارای ۹ مقسوم علیه است. با جمع این ۹ عدد محاسبه می‌شود.

۲۶- گزینه‌ی د صحیح است.

کافی است به ازای هر عدد داشته باشیم این عدد چند بار در مجموع نهایی حاضر می‌شود. با این کار اعداد به تعدادی دسته تقسیم می‌شوند و به ازای هر دسته داریم که اعداد این دسته چند بار در مجموع نهایی حضور دارند. سپس مجموع اعداد هر دسته را در عدد حضور آن‌ها ضرب می‌کنیم و پاسخ نهایی را محاسبه می‌کنیم.

۲۷- گزینه‌ی ب صحیح است.

چون کشور پنیر جنوبی از نحوه‌ی چینش کشور پنیر شمالی اطلاع می‌یابد یک استراتژی بهینه برای آن این است که همیشه سعی کند جزیره‌هایی که کم‌ترین نیرو را دارند اشغال کند. اما می‌دانیم مجموع تعداد نیروهایی که پنیر شمالی به چهار جزیره‌ای که کم‌ترین نیروها را دارند اعزام کرده است حداکثر ۴۰ است (چرا؟). در نتیجه کشور پنیر جنوبی می‌تواند حداقل ۴ جزیره را تصاحب کند. اما اگر کشور پنیر شمالی به هر جزیره دقیقاً ۱۰ نیرو اعزام کند پنیر جنوبی نمی‌تواند بیشتر از ۴ جزیره را تصاحب کند و در نتیجه پنیر شمالی می‌تواند ۶ جزیره را تصاحب کند.

۲۸- گزینه‌ی ج صحیح است.

اگر پنیر شمالی در هر جزیره ۷ نیرو قرار دهد، پنیر جنوبی حداکثر می‌تواند ۵ جزیره را اشغال کند. اما پنیر شمالی می‌تواند در یک جزیره ۶ نیرو قرار دهد به طوری که باز هم پنیر جنوبی نتواند بیشتر از ۵ جزیره را اشغال کند. با استفاده از اصل لانه‌ی کبوتری می‌توان نشان داد که پنیر شمالی با کمتر از ۶۸ نیرو نمی‌تواند این کار را انجام دهد، چون در این صورت پنیر جنوبی با ۴۵ نیرو می‌تواند حداقل ۶ جزیره را تصاحب کند (چرا؟). البته با ۶۸ نیرو اگر چه پنیر جنوبی نمی‌تواند بیشتر از ۵ جزیره را تصاحب کند اما پنیر شمالی هم نمی‌تواند مطمئن باشد که ۵ جزیره را تصاحب می‌کند، زیرا ممکن است در یکی از جزایر تساوی رخ دهد.

۲۹- گزینه‌ی ج صحیح است.

فقط کسانی که کلاه تک بر سر دارند قدرت تشخیص رنگ کلاه خود را دارند. حالت ۲ ۲ ۲ جواب حداقل و حالت ۴ ۱ ۱ جواب حداکثر را تولید می‌کند.

۳۰- جواب صحیح «۳ و ۶» است که در گزینه‌ها موجود نیست.

کافی است حالت‌گیری کنیم.

- در حالت ۴ ۱ ۱ دو نفر دست بلند می‌کنند و چهار نفر دیگر متوجه تک بودن آن‌ها و در نتیجه رنگ کلاه خود می‌شوند.
- در حالت ۲ ۲ ۲ کسی دست بلند نمی‌کند و همه متوجا حالت ۲ ۲ ۲ می‌شوند، پس هر رنگی را تک دیدند رنگ کلاه خود آن‌ها است.
- در حالت ۳ ۲ ۱ فقط یک نفر دست بلند می‌کند و همه متوجه حالت ۳ ۲ ۱ می‌شوند. گروه ۱ و ۲ به راحتی رنگ کلاه خود را تشخیص می‌دهند. ولی اعضای گروه ۳ رنگ‌ها را به صورت ۲ ۲ ۱ می‌بینند و قادر به تشخیص رنگ کلاه خود از بین دو ۲ نیستند. پس پاسخ ۳ و ۶ است.