جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
بیست و سومین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۱

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۳۵	-	۱۸۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۳۵ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

- سؤال های ۲۴ تا ۳۵ در چند دسته‌ی سؤالی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.
- نمره‌دهی به همه‌ی سؤال‌ها یکسان می‌باشد. جواب درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱- فرید یک جدول ۳ × ۳ به صورت مقابل دارد. او به رشید اجازه داده هر چندباری که خواست اعداد موجود در دو خانه‌ی مجاور را جا به جا کند. دو خانه مجاورند، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. با این حرکات رشید به چند جدول مختلف می‌تواند برسد؟

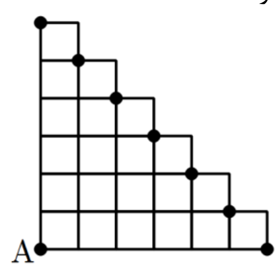
۱	۰	۰
۰	۱	۱
۰	۰	۰

الف) 3^5-1 ب) 3^5 ج) ۷۲ د) ۹۰ ه) ۸۴

۲- می‌خواهیم آهنگی با نت‌های موسیقی بسازیم با این شرط‌ها که فقط از نت‌های «سل» ، «لا» و «سی» استفاده کنیم، بعد از هیچ نت «سل» ای بلافاصله نت «سی» نیاید و طول آهنگ دقیقاً ۳ نت باشد. با فرض اینکه می‌توان از نت تکراری استفاده کرد به چند طریق می‌توان چنین آهنگی ساخت؟

الف) ۹ ب) ۱۵ ج) ۲۴ د) ۲۱ ه) ۲۷

۳- می‌خواهیم از نقطه‌ی A در شکل مقابل به یکی از نقاطی برویم که با دایره‌ی بزرگ مشخص شده‌اند. با فرض اینکه فقط می‌توانیم به سمت راست یا بالا حرکت کنیم، چند مسیر مختلف وجود دارد؟



الف) 2^6 ب) $\frac{12!}{2\times6!\times6!}$ ج) 2^5 د) $\frac{10!}{2\times5!\times5!}$ ه) $\frac{12!}{6!\times6!}$

۴- یگانه یک جدول شطرنجی سیاه ـ سفید با ابعاد ۱۹ × ۱۹ دارد که سطرهایش را از بالا به پایین و ستون‌هایش را از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۱۹ شماره‌گذاری کرده است. سپس در هر یک از خانه‌های جدول حاصل ضرب شماره‌ی سطر و شماره‌ی ستونی را که در آن قرار دارد یادداشت می‌کند. با فرض اینکه خانه‌ی بالا ـ چپ جدول سیاه باشد، مجموع اعدادی که در خانه‌های سیاه نوشته شده، چند است؟

الف) 2×90^2 ب) 2×100^2 ج) 2×95^2 د) 90^2+100^2 ه) $2\times90^2+95$

۵- رستم اعداد ۰ تا ۳۱ را در مبنای ۲ روی یک کاغذ می‌نویسد. او چند بار رقم ۱ را نوشته است؟ برای مثال برای نوشتن عدد ۵ در مبنای ۲، دو بار رقم ۱ را می نویسیم.

الف) ۸۰ ب) ۶۴ ج) ۶۲ د) ۴۰ ه) ۷۲

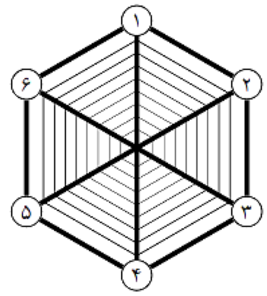
۶- کوچک‌ترین عدد طبیعی مانند n را در نظر بگیرید که به ازای هر $2\leq i\leq 10$، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر i برابر i-1 باشد. ضرب ارقام عدد n چند است؟

الف) ۱۸۱۴۴ ب) ۷ ج) ۹۰ د) ۰ ه) ۱۶۳۲۹۶

۷- ۱۵ شتر در یک صف پشت سر هم ایستاده‌اند. می‌دانیم که وزن هر شتر عددی طبیعی از ۱ تا ۱۵ است و ممکن است وزن دو شتر یکسان باشد. هر شتر مجموع وزن خود و دو برابر وزن نفر جلویی‌اش را حساب می‌کند به جز نفر اول که شتری در جلویش نیست. در کمال تعجب شترها متوجه می‌شوند که همه‌ی ۱۴ عدد محاسبه شده بر ۱۵ بخش‌پذیر است. وزن این ۱۵ شتر چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

الف) !۱۵ ب) $۲^{۱۴}$ ج) ۱۵ د) ۲۲۵ ه) $۱۵^۲-۱$

۸- شش عنکبوت با شماره‌های ۱ تا ۶ روی تار عنکبوتی به شکل رو به رو زندگی می‌کنند. هر عنکبوت دقیقاً با سه عنکبوت دیگر همسایه است. برای مثال عنکبوت ۱ با عنکبوت‌های ۲ و ۴ و ۶ همسایه است.

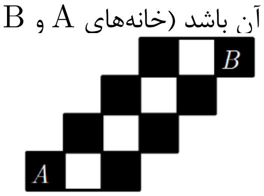


در ابتدای روز هر عنکبوت روی در خانه‌اش، شماره‌اش را می‌نویسد. سپس در هر ساعت هر یک از عنکبوت‌ها عدد نوشته شده روی در خانه‌اش را پاک می‌کند و به جای آن مجموع اعداد همسایه‌هایش را می‌نویسد. مثلاً بعد از گذشت یک ساعت روی در خانه‌ی عنکبوت شماره‌ی ۲ عدد ۹ نوشته می‌شود. پس از گذشت ۴ ساعت، مجموع اعداد نوشته شده روی همه‌ی خانه‌ها چند است؟

الف) ۱۹۱۹ ب) ۱۸۶۹ ج) ۱۷۰۱ د) ۱۹۲۹ ه) ۱۳۹۹

۹- مهشید قطعه‌ای از صفحه‌ی شطرنج را به شکل رو به رو بریده است. او می‌خواهد مهره‌ی شاه را از خانه‌ی A به خانه‌ی B ببرد به طوری که:

- کم‌ترین تعداد خانه را طی کند.
- تعداد خانه‌های سیاه مسیر دو برابر تعداد خانه‌های سفید آن باشد (خانه‌های A و B هم جزء مسیر هستند).



مهره‌ی شاه در هر حرکت خود می‌تواند از یک خانه به خانه‌ی دیگر برود، به شرطی که این دو خانه در حداقل یک نقطه اشتراک داشته باشند. مثلاً از خانه‌ی A مستقیماً می‌توان به خانه‌های راست و بالا ـ راست آن رفت. مهشید به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

الف) ۸ ب) ۰ ج) ۱ د) ۱۶ ه) ۳

۱۰- دوتا ظرف داریم که در اولی یک لیتر آب و در دومی یک لیتر گلاب وجود دارد. از ظرف اول یک لیوان آب برمی‌داریم، به ظرف گلاب اضافه می‌کنیم و کاملاً هم می‌زنیم تا مخلوط شوند. بعد از ظرف دوم یک لیوان محلول آب و گلاب برمی‌داریم، به ظرف آب اضافه می‌کنیم و کاملاً هم می‌زنیم. درصد آب در ظرف اول و درصد گلاب در ظرف دوم را مقایسه کنید.

الف) مساوی هستند.

ب) درصد آب در ظرف اول بیشتر است.

ج) به حجم لیوان ربط دارد.

د) حتی با دانستن حجم لیوان هم نمی‌شود گفت.

ه) درصد گلاب در ظرف دوم بیشتر است.

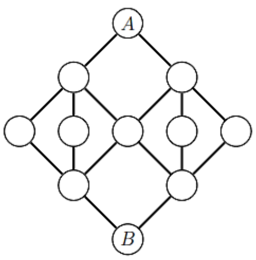
۱۱- یک جدول ۱۰ × ۱۰ داریم. می‌خواهیم تعدادی از خانه‌های آن را رنگ کنیم به طوری که شرط زیر بر قرار باشد:

- به ازای هر پوشش این جدول با مستطیل های ۲ × ۱ ، تعداد مستطیل‌های ۲ × ۱که هر دو خانه‌ی آن‌ها رنگ شده است حداکثر ۲۵ باشد.

توجه کنید که در هر پوشش باید هر خانه‌ی جدول توسط دقیقاً یک مستطیل ۲ × ۱ پوشانده شود. همچنین مستطیل‌های ۲ × ۱ می‌توانند به صورت افقی یا عمودی قرار بگیرند و هر کدام باید دقیقاً دو خانه را پوشش دهند. با این شرایط حداکثر چند خانه را می‌توانیم رنگ کنیم؟

الف) ۵۱ ب) ۵۰ ج) ۸۰ د) ۶۰ ه) ۷۵

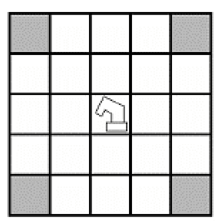
۱۲- شکل مقابل چند جزیره را نشان می‌دهد که با تعدادی پل به هم متصل شده‌اند.



حمید و مجید در ساعت ۱۲ ظهر در جزیره‌ی A هستند. آن‌ها باید به کشتی‌ای که در ساحل جزیره‌ی B لنگر انداخته و در ساعت ۴ بعدازظهر حرکت می‌کند برسند. حرکت از ابتدای یک پل به انتهای آن یک ساعت زمان می‌برد و یک پل در هر لحظه می‌تواند وزن یک نفر را تحمل کند و اگر در یک لحظه هم حمید و هم رشید روی آن باشند، پل فرو می‌ریزد. چند حالت مختلف برای مسیر حرکت این دو وجود دارد به طوری که هر دوی آن‌ها به کشتی جزیره‌ی B برسند؟

الف) ۱۲ ب) ۲۰ ج) ۱۶ د) ۳۶ ه) ۲۸

۱۳- خیکوله مهره‌ی شطرنج جدید به اسم «خیل» اختراع کرده است. حرکت این مهره مانند فیل‌های معمولی است با این تفاوت که خانه‌هایی را روی صفحه شطرنج تهدید می‌کند که دقیقاً دو خانه‌ی قطری (هم از نظر تعداد سطر و هم از نظر تعداد ستون) با آن فاصله داشته باشند. به چند طریق می‌توان در یک صفحه‌ی شطرنج ۸ × ۸ دو مهره‌ی خیل متمایز قرار داد که یکدیگر را تهدید نکنند؟



الف) ۱۸۷۲ ب) ۳۸۸۸ ج) ۱۱۴۴ د) ۱۹۴۰ ه) ۲۲۸۸

۱۴- در هر یک از خانه‌های یک جدول ۴ × ۴ یکی از اعداد صفر یا یک را می‌نویسیم. سپس در کنار هر سطر حاصل جمع اعداد آن سطر را می‌نویسیم. سپس t را برابر حاصل ضرب اعداد کنار سطرها قرار می‌دهیم. به ازای چند حالت از جدول اولیه مقدار t برابر صفر می‌شود؟

الف) $۲^{۱۶} - ۱۵^{۴}$ ب) $۲^{۱۵} - ۱$ ج) $۲^{۱۵}$ د) $۲^{۱۵} + ۱$ ه) $۲^{۱۶} - ۱۵$

۱۵- خالوخیکول برای خیکول یک عروسک خریده است و خیکوله آن را دور یک دایره با صد جایگاه قرار داده است. فرض کنید در ثانیه‌ی اول عروسک در خانه‌ی شماره ی یک قرار دارد.

ویژگی این عروسک این است که در هر ثانیه دو عروسک مانند خودش از جیبش بیرون می‌آیند، یکی به ده خانه جلوتر می‌پرد و دیگری به یک خانه عقب‌تر. بنابراین در ثانیه‌ی دوم در هر یک از خانه‌های ۱، ۱۱ و ۱۰۰ یک عروسک قرار دارد. عروسک‌های جدید نیز به این روند ادامه می‌دهند (ممکن است در یک خانه بیش از یک عروسک قرار بگیرد). عروسک‌ها در ثانیه‌ی چندم تمامی صد خانه‌ی جدول را اشغـال می‌کنند؟

الف) ۱۹ ب) ۱۷ ج) ۲۰ د) ۱۸ ه) ۲۱

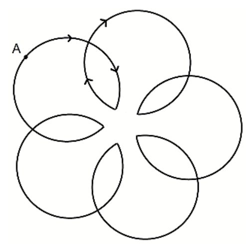
۱۶- در یک تورنومنت ۱۵ پینگ‌پنگ‌باز حضور دارند و هر دو نفر دقیقاً یکبار با هم بازی می‌کنند. به یک ۳تایی از این بازیکنان، «ضایع» می‌گوییم هرگاه اولی، دومی را برده باشد، دومی، سومی را برده باشد و سومی اولی را برده باشد. حداکثر چند ۳تایی ضایع در این مسابقات وجود دارد؟

الف) ۱۴۰ ب) ۳۱۵ ج) ۴۵۵ د) ۲۸۰ ه) ۴۲۰

۱۷- می‌خواهیم هشت توپ یکسان را در سه کیسه‌ی یکسان قرار دهیم به طوری که هیچ توپی بیرون کیسه‌ها نباشد و همچنین در هر کیسه تعداد فردی توپ وجود داشته باشد. با فرض اینکه کیسه‌ها می‌توانند در داخل یکدیگر قرار گیرند، به چند طریق این کار ممکن است؟ توجه کنید که اگر کیسه‌ی a درون کیسه‌ی b باشد، توپ‌های درون کیسه‌ی a برای کیسه‌ی b هم شمره می‌شود.

الف) ۱۶ ب) ۷ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۸

۱۸- در شکل مقابل مبینا روی نقطه ی A ایستاده است. او فقط می‌تواند به صورت ساعت‌گرد روی کمان‌ها حرکت کند.



مبینا به چند طریق می‌تواند با شروع از نقطه‌ی A و حرکت کردن روی کمان‌ها خود را به مکان اولیه‌اش برساند با فرض اینکه از هر نقطه حداکثر سه بار عبور کند؟ مثلاً یک مسیر ممکن این است که از کمان‌های بیرونی سه بار عبور کند و در نقطه‌ی A متوقف شود.

الف) $۲ \times ۳^{۵} + ۱$ ب) ۱۰۰ ج) ۱۰۱ د) $۲^{۵} + ۳^{۵}$ ه) $۳^{۶}$

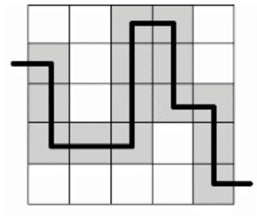
۱۹- دنباله $a_۱, a_۲, \ldots, a_m$ از اعداد ۱ تا n را خوب می‌نامیم اگر به ازای هر $i < j$ که $a_i = a_j$ **هیچ** یک از اعداد ظاهر شده در $a_{i+۱}, a_{i+۲}, \ldots, a_{j-۱}$ خارج از بازه $\left[a_i, a_{i+۱}, \ldots, a_j\right]$ ظاهر نشده باشند.در واقـــع در یک دنبـــاله خـــوب، اعداد ظاهر شـده بین دو عدد مساوی نباید در خارج از بازه بینشان ظاهر شده باشند.

به عنوان مثال دنباله‌ی ۱,۲,۳,۱,۴,۱ یک دنباله‌ی خوب است ولی دنباله‌ی ۱,۲,۳,۱,۴,۲ خوب نیست، چون عدد ۲ هم بین دوتا ۱ ظاهر شده است و هم بیرون آن‌ها. طول بزرگ‌ترین دنباله‌ی خوب با اعداد ۱ تا n چند است؟

الف) ۴n ب) ۳n ج) ۲n -۱ د) ۲n ه) ۴n – ۱

۲۰- جدولی ۵ × ۵ داریم. فرشید از یک خانه واقع در ستون اول شروع به حرکت می‌کند و در هر مرحله به سمت بالا، پایین و یا راست حرکت می‌کند تا نهایتاً از سمت راست جدول خارج شود. او به هیچ خانه‌ای دوبار نمی‌رود و نمی‌توانـد از بالا و پایین جدول خارج شود.

به عنوان مثال شکل مقابل یکی از مسیرهای ممکن را نشان می‌دهد. به ازای هر مسیر که فرشید می‌تواند بپیماید تعداد خانه‌های مسیر را یادداشت کرده‌ایم. مجموع این اعداد چند است؟



الف) ۲۱۸۷۵۰ ب) ۲۰۳۱۲۵ ج) ۱۵۶۲۵ د) ۴۳۷۵۰ ه) ۱۰۹۳۷۵

۲۱- ۸ نفر با هم یک بازی می‌کنند به این صورت که هر نفر در ابتدا یک کلمه انتخاب می‌کند. سپس در هر مرحله این ۸ نفر به ۴ گروه ۲تایی تقسیم می‌شوند و در هر گروه ۲ نفره، هر کس تمام کلماتی را که می‌داند به نفر مقابلش می‌گوید. بازی زمانی تمام می‌شود که هر یک از این ۸ نفر هر ۸ کلمه‌ی اولیه را بدانند. ما می‌دانیم که حمید فقط در مرحله‌ی اول راست می‌گوید و در باقی مراحل نمی‌توان روی حرفش حساب کرد. حداقل چند مرحله لازم است تا مطمئن شویم هر ۸ نفر، ۸ کلمه‌ی اولیه را می‌دانند؟

الف) ۵ ب) ۷ ج) ۴ د) ۶ ه) ۳

۲۲- جدول رو به رو به ما داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم تغییری در این جدول بدهیم. تغییرات به این صورت است که جای دو سطر یا جای دو ستون را عوض کنیم. با استفاده از این تغییرات به چند جدول مختلف می‌توانیم برسیم؟ توجه کنید که تغییرات را به تعداد دلخواه می‌توانیم انجام دهیم.

۱	۰	۱	۰
۱	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰

الف) ۱۴۴ ب) ۹۶ ج) ۵۷۶ د) ۲۸۸ ه) ۲۴

۲۳- رشید به تازگی با دو نوع دستگاه به نام‌های کفگیر و سقفگیر آشنا شده است که به صورت زیر عمل می کنند:

- دستگاه کفگیر عدد x را به عنوان ورودی گرفته و $\lfloor x / ۲ \rfloor$ را به عنوان خروجی بر می‌گرداند.
- دستگاه سقفگیر عدد x را به عنوان ورودی گرفته و $\lceil x / ۲ \rceil$ را به عنوان خروجی برمی‌گرداند

رشید ۱۳۹۱ دستگاه در یک ردیف پشت سر هم قرار داده است به طوری که دستگاه iام کفگیر است اگر i عددی اول باشد و در غیر این صورت سقفگیر است. برای مثال دستگاه اول و چهارم سقفگیر هستند و دستگاه دوم و سوم کفگیر هستند.
حال رشید یک عدد طبیعی به عنوان ورودی به دستگاه اول می‌دهد، سپس خروجی این دستگاه وارد دستگاه دوم می‌شود، خروجی دستگاه دوم وارد دستگاه سوم می‌شود و به همین ترتیب تا دستگاه ۱۳۹۱ام که خروجی نهایی را تولید می‌کند. به ازای چند عدد به عنوان ورودی دستگاه اول، خروجی نهایی برابر با یک می‌شود؟

الف) ۱۳۹۰ ب) ۱۹۳۳۴۹۰ ج) $۲^{۱۳۹۱}$ د) $۲^{۱۳۹۰}$ ه) ۱۳۹۱

سؤال‌های ۲۴ تا ۳۵ در چند دسته‌ی سؤالی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.

---

۱۰۰ انسان و لیستی از نام‌های ۱۰۰ حیوان وجود دارد. هر انسان نام دقیقاً ۱۰ حیوان را می‌داند و نام هر حیوان را دقیقاً ۱۰ انسان می دانند. هیچ دو انسانی دقیقاً ۱۰ نام مشابه را نمی‌دانند.
آن‌ها می‌خواهند نام حیوانات را روی تخته بنویسند و از نوشتن نام‌های تکراری پرهیز کنند. برای این منظور تعدادی بازی طراحی کرده‌اند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید:

۲۴- در بازی «ننویسی می‌بازی» انسان‌ها در یک صف قرار می‌گیرند و هر کس در نوبت خود نام حیواناتی را که می‌داند و هنوز روی تخته نیستند، روی تخته می‌نویسد. هر کس در نوبت خود نتواند نام حیوانی را به تخته اضافه کند بازنده است.
وقتی نوبت همه انسان‌ها تمام شد تعداد بازنده‌ها چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

الف) ۸۹ ب) ۸۲ ج) ۹۰ د) ۸۰ ه) ۸۱

۲۵- در بازی «بنویس ولی می‌بازی» انسان‌ها در یک صف قرار می‌گیرند و هر کس در نوبت خود نام حیواناتی را که می‌داند و هنوز روی تخته نیستند، روی تخته می‌نویسد. و اگر حداقل نام یکی از حیواناتی را که می‌داند قبلاً روی تخته نوشته باشند، می‌بازد.

وقتی نوبت همه انسان‌ها تمام شد تعداد بازنده‌ها چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

الف) ۸۱ ب) ۹۰ ج) ۱۰ د) ۹۱ ه) ۹

۲۶- در بازی «ببازی نمی‌نویسی» انسان‌ها در یک صف قرار می‌گیرند و هر کس در نوبت خود اگر حداقل نام یکی از حیواناتی را که می‌داند قبلاً روی تخته نوشته باشند، می‌بازد و چیزی روی تخته نمی‌نویسد. در غیر این صورت نام حیواناتی را که می‌داند روی تخته می‌نویسد.

وقتی نوبت همه انسان‌ها تمام شد، تمام حیوانات روی تخته چند عدد مختلف می‌توانند باشند؟

الف) ۱ ب) ۹۰ ج) ۱۰ د) ۹۱ ه) ۹

نازخیکول یک کیسه شامل ۲۲ تیله سفید و ۳۳ تیله سیاه دارد. تا زمانی که بیش از ۱ تیله در کیسه وجود داشته باشد، در هر مرحله نازخیکول بدون نگاه کردن به تیله‌ها دو تیله را به صورت تصادفی از کیسه خارج می‌کند و با توجه به رنگ آن‌ها، یکی از اعمال زیر را انجام می‌دهد:

- اگر هر دو تیله سفید بودند، هر دو تیله را دور می‌اندازد.
- اگر هر دو تیله سیاه بودند، یک تیله را دور می‌اندازد و دیگری را به کیسه باز می‌گرداند.
- اگر یک تیله سفید و یک تیله سیاه بود، تیله سفید را به کیسه برمی‌گرداند و تیله سیاه را دور می‌اندازد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

۲۷- حداقل و حداکثر چند مرحله طول می‌کشد تا نازخیکول متوقف شود (زمانی که حداکثر ۱ تیله در کیسه وجود داشته باشد)؟

الف) ۴۳، ۴۵ ب) ۴۴،۴۴ ج) ۴۴، ۴۵ د) ۴۳، ۴۴ ه) ۴۳،۴۳

۲۸- کدام گزاره در مورد حالت نهایی درست است؟

الف) در حالت پایانی حتماً یک تیله سیاه در کیسه وجود دارد.

ب) کیسه حتماً خالی می‌شود.

ج) در صورت خالی نشدن کیسه، رنگ تیله پایانی حتماً سیاه است.

د) در حالت پایانی حتماً یک تیله سفید در کیسه وجود دارد.

ه) هیچ‌کدام

یک جایگشت از اعداد ۱ تا n یک لیست از اعداد ۱ تا n است که هر عدد دقیقاً یکبار در آن ظاهر شده است. برای مثال < ۱،۵،۳،۴،۲ > یک جایگشت از اعداد ۱ تا ۵ است.

رنگ‌آمیزی معتبر برای یک جایگشت، رنگ‌آمیزی است که شرایط زیر را داشته باشد:

- دو عدد مجاور هم در جایگشت هم‌رنگ نباشند.
- دو عدد که اختلاف آن‌ها برابر با ۱ است هم‌رنگ نباشند.

عدد رنگی یک جایگشت برابر است با حداقل تعداد رنگ‌های متفاوتی که برای رنگ‌آمیزی معتبر اعداد آن جایگشت لازم است.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید:

۲۹- عدد رنگی جایگشت <۱,۵,۲,۴,۶,۳> چند است؟

الف) ۴ ب) ۱ ج) ۲ د) ۵ ه) ۳

۳۰- در میان تمام جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۶ عدد رنگی چند جایگشت برابر با ۲ است؟

الف) ۶۲۵ ب) ۳۶ ج) ۰ د) ۱۲۵ ه) ۷۲

۳۱- بیشترین عدد رنگی بین همه جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۷ چند است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۶ د) ۴ ه) ۵

تیلوس‌ها موجوداتی هستند که بین هر جفت از آن‌ها یک رابطه‌ی دو طرفه‌ی دوستی یا دشمنی بر قرار است. ویژگی جالب این موجودات این است که به ازای هر سه تیلوس دلخواهی، یا هر سه با هم دوست‌اند یا دو نفرشان که با هم دوست‌اند، هر دو با نفر سوم دشمن‌اند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

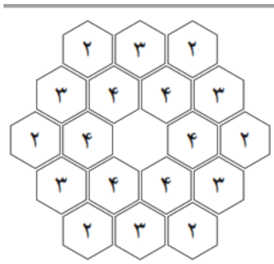
۳۲- جمشید سیاره‌ای متعلق به تیلوس‌ها کشف کرده است که در آن دقیقاً ۱۲ رابطه‌ی دشمنی وجود دارد. حداقل چند تیروس در این سیاره زندگی می‌کنند؟

الف) ۹ ب) ۶ ج) ۵ د) ۷ ه) ۸

۳۳- تحقیقات اخیر جمشید نشان می‌دهد که در سیاره‌ای جدید، ۹ تیلوس با نام‌های T_1 تا T_9 زندگی می‌کنند. همچنین او فهمیده است که T_1 و T_2 با هم دشمن، T_3 و T_4 با هم دشمن و T_4 و T_5 با هم دشمن‌اند. با این اطلاعات روابط دوستی و دشمنی بین این ۹ تیلوس به چند شکل مختلف می‌تواند باشد؟

الف) ۱۳ ب) ۳۲ ج) ۵۶ د) ۲۸ ه) ۶۴

شکل رو به رو کشور خیکولند را نشان می‌دهد که از ۱۸ قبیله تشکیل شده و قلمرو هر قبیله به شکل یک ۶ ـ ضلعی است. طبق یک آیین دیرینه صبح روز مرحله‌ی اول هر قبیله به تعدادی از همسایه‌های خود حمله می‌کند. در شکل عدد روی قلمروی هر قبیله نشان‌دهنده‌ی تعداد قبایلی است که این قبیله به آن‌ها حمله خواهد کرد. دو قبیله همسایه اند اگر و تنها اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. یک قبیله تنها نامیده می‌شود اگر از طرف همه‌ی همسایه‌های خود مورد حمله قرار بگیرد.



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید:

۳۴- حداقل چند قبیله‌ی تنها وجود دارد؟

الف) ۶ ب) ۲ ج) ۱ د) ۰ ه) ۱۸

۳۵- حداکثر چند قبیله‌ی تنها وجود دارد؟

الف) ۱۵ ب) ۱۲ ج) ۶ د) ۱۸ ه) ۱۳

«پاسخنامه تشریحی»

۱- **گزینه‌ی ه دست است.**

با استفاده از حرکات توصیف شده می‌توان هر ترتیبی از قرارگیری صفر و یک ها را در جدول ساخت (حتی اگر اعداد تمامی خانه‌های جدول از یکدیگر متمایز بودند نیز می‌توانستیم هر حالتی را تولید کنیم). در نتیجه جواب مسئله برابر است با:

$$\binom{۹}{۳} = ۸۴$$

۲- **گزینه‌ی د درست است.**

در صورتی که نت اول سل نباشد، برای نت بعدی سه حالت و در صورتی که سل باشد دو حالت داریم. به همین ترتیب نت دوم را تقسیم بندی می‌کنیم تا به نتیجه زیر برسیم:

$$۲\times(۲\times(۳)+۱\times(۲))+۱\times(۱\times(۳)+۱\times(۲))=۲۱$$

۳- **گزینه‌ی الف درست است.**

هر مسیر از نقطه‌ی A به نقاط بزرگ را می‌توان با یک رشته‌ی دودویی به طول ۶ متناظر ساخت (صفر در رشته به معنی حرکت به سمت راست و یک به معنی حرکت به سمت بالا خواهد بود).
به این نکته توجه کنید که در هر نقطه از مسیر دقیقاً دو انتخاب داریم و طول مسیر هم دقیقاً ۶ می‌باشد. در نتیجه تعداد کل حالات برابر است با: $۲^۶$.

۴- **گزینه‌ی الف درست است.**

طبق نکات یادشده در سؤال می‌دانیم خانه‌های سیاه، خانه‌هایی هستند که زوجیت شماره‌ی سطر و ستون‌شان یکی است.
ابتدا مجموع خانه‌های واقع در سطر و ستون فرد و سپس مجموع خانه‌های واقع در سطر و ستون زوج را محاسبه می‌کنیم. هر کدام شامل جدولی کامل خواهند بود که مجموعش از ضرب مجموع سطر در مجموع ستون به دست می‌آید.

$$(۱+۳+...+۱۹)^۲+(۲+۴+...+۱۸)^۲=۹۰^۲+۱۰۰^۲$$

۵- **گزینه‌ی الف درست است.**

هر رقم از یک عدد ۵ رقمی در مبنای دو می‌تواند یک یا صفر باشد که دقیقاً در ۱۶ عدد، یک و در ۱۶ عدد دیگر صفر است. در نتیجه مجموع تعداد ارقام یک در این اعداد برابر است با: ۸۰ = ۵ × ۱۶

۶- **گزینه‌ی ج درست است.**

در صورتی که به عدد n یک واحد اضافه کنیم باقی‌مانده‌ی آن بر هر $۲\le i\le ۱۰$ ، صفر خواهد بود. کوچک‌ترین عدد با این ویژگی،
ک.م.م این اعداد خواهد بود:

$$n+۱=۸\times۹\times۵\times۷=۲۵۲۰\Rightarrow n=۲۵۱۹$$

پس ضرب ارقام آن بر ۹۰ خواهد بود.

۷- گزینه‌ی ج درست است.

ادعا می‌کنیم در صورتی که وزن شتر اول مشخص شود، وزن بقیه‌ی شترها به صورت یکتا تعیین می‌شود. برای اثبات این ادعا باید وزن هر شتر را از روی وزن شتر جلوی آن بدست آوریم.

فرض کنید که وزن شتر جلویی i باشد، اگر i فرد باشد وزن شتر باید $\frac{۱۵-i}{۲}$ و در غیر این صورت باید $\frac{۳۰-i}{۲}$ باشد.

در نتیجه تعداد کل حالات ۱۵ است.

* نکته: می‌توان همین روند را برای شتر آخر نیز نوشت. سعی کنید وزن شتر (i-۱) ام را بر اساس وزن شتر iام به دست آورید.

۸- گزینه‌ی ج درست است.

در هر مرحله عدد نوشته شده در خانه‌ها پاک می‌شود ولی به عدد سه خانه‌ی دیگر اضافه می‌شود. پس در هر مرحله مجموع اعداد خانه‌ها سه برابر خواهد شد.

در ابتدا مجموع اعداد، ۲۱ است . پس از گذشت چهار ساعت برابر ۱۷۰۱ = ۸۱ × ۲۱ می‌شود.

۹- گزینه‌ی ه درست است.

تعداد خانه‌های مسیر ۶تایی هستند در نتیجه باید دقیقاً از ۲ خانه‌ی سفید بگذریم. در نتیجه هر زمان که به خانه‌ی سفید رسیدیم باید به خانه‌ی سفید بالا ـ راست آن برویم و سپس از خانه‌های سفید خارج شویم. پس تعداد روش‌های مختلف این کار ۳ حالت است (با توجه به اینکه اولین بار به کدام خانه‌ی سفید رسیده‌ایم).

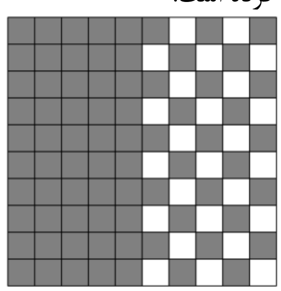
۱۰- گزینه‌ی الف درست است.

چون در نهایت در هر دو ظرف یک لیتر مایع وجود دارد، هر چقدر که در ظرف اول آب باشد در ظرف دوم به همان میزان گلاب وجود دارد. در نتیجه درصدهای ذکر شده با یکدیگر برابر هستند.

۱۱- گزینه‌ی ه درست است.

در صورتی که در یک پوشش ۲۵ مستطیل کامل رنگ شده باشد و از بقیه‌ی مستطیل‌ها نیز حداکثر یک خانه‌ی رنگ شده داشته باشیم، به حداکثر ۷۵ خانه‌ی رنگی خواهیم داشت.

مثال زیر با این تعداد رنگ‌آمیزی، شرایط مسئله را برآورده کرده است.



۱۲- گزینه‌ی ب درست است.

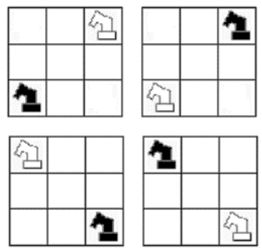
در ساعت اول دو حالت برای حرکت آن‌ها وجود دارد. در ساعت دوم اگر هر دو به جزیره‌ی وسط نقشه نروند، بقیه مسیر به صورت یکتا مشخص می‌شود. تعداد این حالات برابر ۸ است. اگر هر دو به جزیره‌ی وسط سفر کنند دو حالت برای ادامه‌ی حرکت وجود دارد. در نتیجه جواب نهایی برابر است با:

$$۲ \times (۸ + ۲) = ۲۰$$

۱۳- گزینه‌ی ب درست است.

حالات غیر معتبر را از کل حالات قرارگیری دو خیل در صفحه‌ی شطرنج کم می‌کنیم.

وقتی دو خیل همدیگر را تهدید می‌کنند که در دو قطر یک مربع ۳ × ۳ باشند. چون رنگ خیل‌ها با هم فرق دارد به چهار حالت زیر می‌توانند در قطر قرار بگیرند.



همچنین به ۳۶ حالت می‌توان جدول ۳ × ۳ را در جدول اولیه مشخص کرد. در نتیجه جواب نهایی برابر است با:

$$۶۴ \times ۶۳ - ۴ \times ۳۶ = ۳۸۸۸$$

۱۴- گزینه‌ی الف درست است.

تنها در صورتی t صفر خواهد شد که حداقل یکی از اعدادِ کنار سطرها صفر شود. برای محاسبه بهتر است که حالات متمم آن را محاسبه کنیم.

تعداد حالاتی که هیچ کدام از اعداد کنار سطرها صفر نشوند، بدین معنی است که در هر سطر حداقل یک عدد ۱ داشته باشیم. یعنی تعداد حالات هر سطر برابر ۱۵ خواهد بود (همه‌ی حالات بجز اینکه همه‌ی خانه‌ها صفر باشند). پس کل حالات متمم برابر ؟؟؟ می‌شود و جواب مسئله‌ی اصلی برابر خواهد بود با: $۲^{۱۶} - ۱۵^{۴}$

۱۵- گزینه‌ی الف درست است.

با بررسی مدت زمان رسیدن به خانه‌های مختلف، خانه‌ی ۸۲ دورترین خانه از عروسک است که برای رسیدن به آن ۱۸ ثانیه زمان نیاز است و در نهایت در ثانیه‌ی ۱۹ام این خانه پر می‌شود. می‌توان به سادگی بررسی کرد که تمامی خانه‌های جدول در این زمان دارای عروسک هستند.

۱۶- گزینه‌ی الف درست است.

در صورتی که یک سه‌تایی ضایع نباشد دقیقاً یکی از آن‌ها دو نفر دیگر را برده است (برنده) و دقیقاً یکی از آن‌ها از دو نفر دیگر باخته است (چرا؟). به جای شمارش سه‌تایی‌های ضایع، متمم آن‌ها را می‌شماریم.

هر سه‌تایی غیر ضایع با دو برد برنده اش مشخص می‌شود. پس کافی است که تعداد جفت پیروزی‌های ممکن در مسابقات را بیابیم.

فرض کنید که تعداد بردهای نفر اول تا پانزدهم به ترتیب $d_۱, \dots, d_{۱۵}$ باشد. می‌دانیم مجموع این اعداد برابر تعداد مسابقات است (چون هر مسابقه دقیقاً یک برنده دارد). در نتیجه تعداد زوج پیروزی‌ها برابر خواهد بود با:

$$\binom{d_۱}{۲} + \binom{d_۲}{۲} + \dots + \binom{d_{۱۵}}{۲}$$

که می‌خواهیم این عدد را کمینه کنیم: تنها عدد غیر معلوم در عبارت بالا مجموع مربعات این اعداد است که طبق نامساوی حسابی ـ مربعی مینیمم آن زمانی اتفاق می‌افتد که همگی آن‌ها با یکدیگر برابر باشند (هرکس ۷ برد و ۷ باخت داشته باشد).

از طرفی یک مثال نیز برای چنین اعدادی وجود دارد. در صورتی که ۱۵ نفر را به ترتیب دور دایره قرار دهیم، هر کسی از ۷ نفر جلوی خود ببرد و از ۷ نفر قبل از خود ببازد این کار میسر می‌شود. به ازای این حالت تعداد سه‌تایی‌های ضایع برابر می‌شود با:

$$\binom{۱۵}{۳} - ۱۵ \times \binom{۷}{۲} = ۴۵۵ - ۳۱۵ = ۱۴۰$$

۱۷- گزینه‌ی د درست است.

ابتدا وضعیت کیسه‌ها نسبت به یکدیگر را به دست می‌آوریم. در صورتی که تعداد کیسه‌های بیرونی فرد باشد، یکی از کیسه‌ها حاوی زوج توپ خواهد بود. در نتیجه تعداد کیسه‌های بیرونی دو تا خواهد بود و کیسه‌ی سوم درون یکی از آن‌ها است. کیسه‌ی بیرونی که کیسه‌ای در آن نیست، می‌تواند ۱، ۳، ۵ یا ۷ توپ داشته باشد. همچنین توپ‌های باقی‌مانده در بین دو کیسه‌ی دیگر تقسیم می‌شوند (اگر توپ‌های باقی‌مانده به ترتیب ۷، ۵، ۳ و ۱ باشد به ۴، ۳، ۲ و ۱ حالت در این دو کیسه قرار می‌گیرد).

در نتیجه جواب نهایی برابر است با: $۴ + ۳ + ۲ + ۱ = ۱۰$

۱۸- گزینه‌ی الف درست است.

بر اساس تعداد دورهایی که در نهایت می‌زنیم تقسیم‌بندی می‌کنیم (تعداد دفعاتی که از A می‌گذریم):

- اگر یک دور بزنیم، هر دور کوچک را می‌توانیم صفر، یک یا دو بار طی کنیم. در نتیجه تعداد این حالات برابر $۳^۵$ است.
- اگر دو دور بزنیم، در هر دور کوچک سه حالت ممکن است (یا اصلاً دور کوچک را طی نمی‌کنیم، یا فقط در دور اول یا فقط در دور دوم آن را دور می‌زنیم). پس تعداد این حالات نیز $۳^۵$ است.
- در نهایت اگر سه دور بزنیم، دنباله حرکات به صورت یکتا بدست می‌آید.

در نتیجه کل حالات برابر است با: $۲ \times ۳^۵ + ۱$

۱۹- گزینه‌ی ب درست است.

اگر در دنباله یک عدد چهار بار استفاده شود، همان چهار عدد ناقض شرط مسئله هستند (چرا؟).

پس طول دنباله حداکثر $۳n$ خواهد بود. در صورتی که از هر عدد سه بار استفاده شود و تمام اعداد یکسان در کنار هم آمده باشند به راحتی دیده می‌شود که شرط مسئله در آن صدق می‌کند:

$۱۱۱۲۲۲...nnn$

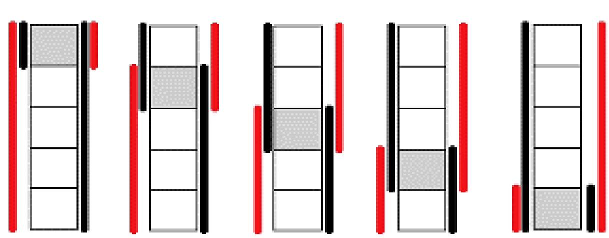
۲۰- گزینه‌ی ب درست است.

برای محاسبه‌ی جواب کافی است به جای جمع زدن طول مسیرهای ممکن، برای هر خانه تعداد مسیرهایی که از آن می‌گذرند را محاسبه کنیم. یک خانه را در نظر بگیرید. برای عبور از آن باید حتماً از یک سطر با شماره‌ی بزرگ‌تر مساوی (یا کوچک‌تر مساوی) این خانه وارد ستون آن شویم و از یک سطر با شماره‌ی کوچک‌تر مساوی (یا بزرگ‌تر مساوی) این خانه از ستون آن خارج شویم. همچنین برای حرکت بین بقیه‌ی ستون‌ها محدودیتی وجود ندارد و در واقع برای رفتن از یک ستون به ستون بعدی ۵ انتخاب داریم. در نتیجه در هر صورت $۵^۴$ حالت برای حالات مختلف مسیر در بقیه‌ی ستون‌ها وجود دارد.

از بین ۳۵ مسیر مختلفی که برای ورود و نهایتاً خروج از این ستون وجود دارد، بسته به اینکه خانه‌ی مورد نظر در کدام سطر باشد تعداد مسیرهای گذرنده از آن متفاوت خواهد بود:

- اگر در سطر اول باشد: در ۹ حالت از این خانه می‌گذرد.
- اگر در سطر دوم باشد: در ۱۵ حالت از این خانه می‌گذرد.
- اگر در سطر سوم باشد: در ۱۷ حالت از این خانه می‌گذرد.
- اگر در سطر چهارم باشد: در ۱۵ حالت از این خانه می‌گذرد.
- اگر در سطر پنجم باشد: در ۹ حالت از این خانه می‌گذرد.

حالات مختلف مسیر در شکل زیر مشخص شده‌اند:



در نتیجه مجموع کل حالات برابر است با:

$$۵^۴ \times ۵ \times (۹+۱۵+۱۷+۱۵+۹) = ۲۰۳۱۲۵$$

۲۱- **گزینه‌ی ج درست است.**

در چهار مرحله با حرکات زیر می‌توان به هدف سؤال رسید. فرض کنید که فرید نفر اول است.

مرحله‌ی اول: (۸و۷) (۶و۵) (۴و۳) (۲و۱)

- هرکسی از دو خبر آگاه است.

مرحله‌ی دوم: (۸و۶) (۷و۵) (۴و۲) (۳و۱)

- به جز ۳ همگی از چهار خبر آگاهند.

مرحله‌ی سوم: (۸و۴) (۷و۳) (۶و۲) (۵و۱)

- به جز ۳ و ۷ و ۵ بقیه از همه‌ی اخبار آگاهند

مرحله‌ی چهارم: (۸و۷) (۶و۵) (۴و۳) (۲و۱)

- تمامی افراد از همه‌ی اخبار آگاهند.

از طرفی با سه حرکت نمی‌توان به نتیجه رسید. زیرا پس از مرحله‌ی اول هر کس حداکثر دو خبر دارد. پس از مرحله‌ی دوم هر کس حداکثر ۴ خبر دارد به جز کسی که با حمید جفت شده است که حداکثر دو خبر دارد. او در مرحله‌ی بعدی حداکثر ۴ خبر جدید می‌گیرد و بنابراین بعد از سه مرحله حداکثر ۶ خبر خواهد داشت.

۲۲- **گزینه‌ی ج درست است.**

در ابتدا تعداد یک‌های سطرها و همچنین ستون‌ها برابر مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ است. در هر مرحله اگر جای دو سطر (ستون) را عوض کنیم این مجموعه نه برای ستون‌ها و نه برای سطرها تغیری نمی‌کند.

از طرفی با حرکات ذکر شده هر جایگشتی از این مجموعه را می‌توان تولید کرد (چرا؟).

اگر جایگشت سطر و ستون‌ها را بدانیم، جدول به صورت یکتا مشخص می‌شود. چرا که اعداد سطر و ستون با شماره‌ی ۴ همه یک هستند و در نتیجه اعداد سطر و ستون با شماره‌ی یک نیز به دست می‌آید. پس از آن اعداد سطر و ستون با شماره‌ی ۳ و در نهایت بقیه‌ی اعداد به دست می‌آیند. پس با توجه به نکات بالا تعداد جداول مختلف برابر است با:

$$(4!)^2 = 576$$

۲۳- **گزینه‌ی ج درست است.**

مستقل از اینکه دستگاه‌ها کفگیر باشند یا سقفگیر، همیشه تعداد اعداد 2^{1391} خواهد بود.

در واقع تعداد اعدادی که پس از i مرحله به ۱ ختم می‌شوند، 2^i تا است.

اگر پس از یک سقفگیر به عدد x برسیم، عدد قبلی $2x - 1$ یا $2x$ بوده است.

اگر پس از یک کفگیر به عدد x برسیم، عدد قبلی $2x + 1$ یا $2x$ بوده است.

نکته‌ی دیگر این است که در هر مرحله مجموعه‌ی جواب‌ها یک بازه است که در مرحله‌ی بعد این بازه دو برابر می‌شود (با استقرا ثابت کنید)

در نتیجه پس از ۱۳۹۱ مرحله 2^{1391} عدد مختلف خواهیم داشت.

۲۴- **گزینه‌ی ب درست است.**

می‌دانیم حداقل ۱۰ نفر بازنده نمی‌شوند، پس حداکثر ۹۰ نفر بازنده خواهند شد.

از طرفی نفر اول نام ۱۰ حیوان را می‌نویسد و هر فرد غیر بازنده‌ای نام حداقل یک حیوان را می‌نویسد. پس حداقل ۹ نفر بازنده خواهیم داشت.

تمام اعداد بین ۹ تا ۹۰ قابل دست‌یابی است و می‌توان مثالی برای هر یک یافت. در نتیجه جواب مسئله برابر ۸۲ است.

۲۵- **گزینه‌ی د درست است.**

یک نفر در صورتی بازنده نیست که بتواند دقیقاً نام ۱۰ حیوان مختلف را بنویسد. در نتیجه تعداد افرادی که بازنده نیستند عددی بین ۱ تا ۱۰ خواهد بود. به وضوح تمام حالات نیز با ارائه‌ی مثال قابل دست‌یابی هستند در نتیجه جواب مسئله ۱۰ است.

۲۶- **گزینه‌ی ه درست است.**

هر نفر که نبازد نام دقیقاً ۱۰ حیوان را خواهد نوشت. در نتیجه همیشه تعداد حیوانات روی تخته بر ۱۰ بخش‌پذیر است.
ولی می‌دانیم در انتها حالتی که ۱۰ حیوان روی تخته نوشته شده باشد اتفاق نمی‌افتد. چرا که در این صورت ۹۹ نفر بعدی باید نام یکی از ۱۰ حیوان روی تخته را بدانند. این بدان معنی است که نام این ۱۰ حیوان حداقل ۱۰۹ بار (۱۰ حیوان برای نفر اول و ۹۹ حیوان برای ۹۹ نفر بعدی) باید آمده باشد که با توجه به شرایط اولیه مسئله ممکن نیست.
پس تعداد حیوانات روی تخته ۹ عدد مختلف می‌تواند باشد. برای هر کدام از این حالات می‌توان مثالی یافت.

۲۷- **گزینه‌ی د درست است.**

تنها در صورتی که دو تیله‌ی سفید بیرون آورده شود، دو تیله از کیسه حذف می‌شود. در نتیجه حداکثر ۱۱ بار این اتفاق خواهد افتاد. در بقیه حالات نیز یک تیله حذف می‌شود. در ابتدا ۵۵ تیله و در انتها حداکثر ۱ تیله خواهد ماند. در نتیجه حداقل ۴۳ مرحله نیاز است. اگر در ۱۱ مرحله‌ی اول سفید از کیسه بیرون آید این حالت اتفاق می‌افتد.
از طرفی در انتها هیچ تیله‌ی سفیدی در کیسه نیست (چون تعداد تیله‌های سفید همواره زوج هستند). در نتیجه دقیقاً یازده بار دو تیله حذف شده است. در ابتدا ۵۵ تیله و در انتها می‌تواند تیله‌ای در کیسه نماند، پس حداکثر ۴۴ مرحله نیاز است. اگر تا زمانی که تیله‌ی سیاه در کیسه است تیله‌ی سفید و سیاه از کیسه بیرون آید این حالت اتفاق خواهد افتاد.

۲۸- **گزینه‌ی د درست است.**

با توجه به روش ذکر شده در مرحله‌ی قبل دو حالت برای انتهای بازی وجود دارد:

- یک تیله‌ی سیاه در کیسه بماند.
- هیچ تیله‌ای در کیسه نماند.

در نتیجه در بین گزینه‌های سؤال، تنها گزینه‌ی د صحیح است.

۲۹- **گزینه‌ی ه درست است.**

سه عدد ۱، ۲ و ۵ باید رنگ‌آمیزی متفاوتی داشته باشد (۱ با ۵ و ۵ با ۲ مجاور است و اختلاف ۱ و ۲ یک واحد است). با سه رنگ نیز به ترتیب زیر می‌توان به هدف رسید.

< ۱,۵,۲,۴,۶,۳ >

۳۰- **گزینه‌ی ه درست است.**

در صورتی عدد رنگی جایگشت ۲ خواهد بود که اعداد زوج به یک رنگ و اعداد فرد به رنگ دیگر باشند. در این صورت باید در جایگاه‌های زوج و در جایگاه‌های فرد رنگ‌های متمایزی باشند. در نتیجه اعداد زوج در یکی از این جایگاه‌ها و اعداد فرد در جایگاه دیگر باشند. پس تعداد این حالات برابر خواهد بود با:

$$۲\times(۳!)^{۲} = ۷۲$$

۳۱- **گزینه‌ی د درست است.**

اگر به ترتیب از ابتدای جایگشت رنگ‌آمیزی کنیم، هر عدد یک همسایه قبل از خود دارد و دو عدد که با آن حداکثر یک واحد اختلاف دارند. پس اگر ۴ رنگ داشته باشیم، همواره می‌توان اعداد را رنگ کرد.

برای مثال زیر نیز حداقل ۴ رنگ مورد نیاز است.

$<۲,۴,۱,۳,۵,۶,۷>$

۳۲- **گزینه‌ی د درست است.**

فرض کنید گرافی داریم که رأس‌هایش تپلوس‌ها و یال‌های آن، رابطه‌ی دشمنی بین دو نفر هستند. در این صورت شرط سؤال بدین معنی است که در هر سه‌تایی زوج یال وجود دارد.

با این تعاریف، ثابت می‌کنیم با ۶ رأس نمی‌توان ۱۲ یال در گراف داشت و با ۷ رأس یک مثال می‌آوریم.

برهان خلف. فرض کنید با ۶ رأس بتوان چنین گرافی ساخت. مکمل گراف را در نظر بگیرید. در این گاف در هر سه‌تایی فرد یال داریم (چرا؟).

- اگر دو تا از این یال‌ها در یک رأس اشتراک داشته باشند، باید یال سوم با آن‌ها تشکیل یک مثلث دهد که در ای صورت سه رأس دیگر صفر یال خواهند داشت و این ممکن نیست.
- اگر هیچ سه یالی در هیچ رأسی اشتراک نداشته باشند، از هر یال، یک رأس در نظر می‌گیریم و این سه رأس در بین خود یالی ندارند که این ممکن نیست.

مثالی برای ۷ رأس: گرافی کامل دو بخشی با بخش‌های ۳ و ۴ عضوی در نظر بگیرید. این گراف شرایط مسئله را دارد و دارای ۱۲ یال است.

۳۳- **گزینه‌ی ب درست است.**

اگر وجود و یا عدم وجود یال‌های بین $(T_۱,T_۳),(T_۱,T_۶),(T_۱,T_۷),(T_۱,T_۸),(T_۱,T_۹)$ مشخص گردند بقیه یال‌ها به صورت یکتا تعیین خواهند شد. این یال‌ها نیز هر کدام به صورت مستقل ۲ حالت دارند. در نتیجه تعداد کل حالات برابر ۳۲ خواهد بود.

۳۴- **گزینه‌ی د درست است.**

اگر قبیله‌ای به یکی از قبیله‌های همسایه‌ی خود حمله نکند آن را ایمن ساخته است.

مثالی وجود دارد که تمام قبیله‌ها ایمن خواهند شد. در این مثال هر قبیله دقیقاً به یکی از قبایل همسایه‌ی خود حمله نمی‌کند.

می‌توان با استفاده از قبیله‌های شماره‌های ۳، قبیله‌های شماره ۴ را ایمن ساخت.

می‌توان با استفاده از قبیله‌های شماره‌های ۴، قبیله‌های شماره ۲ را ایمن ساخت.

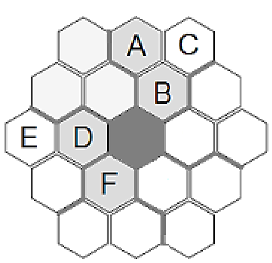
می‌توان با استفاده از قبیله‌های شماره‌های ۲، قبیله‌های شماره ۳ را ایمن ساخت.

۳۵- **گزینه‌ی ب درست است.**

همانند روش قبل باید حداقل قبیله را انتخاب (ایمن) کنیم که هر قبیله‌ای با حداقل یکی از آن‌ها همسایه باشد.

در صورتی که قبیله‌ها با شماره‌ی ۴ را انتخاب کنیم شرایط مسئله برآورده می‌شود.

اثبات می‌کنیم با کم‌تر از ۶ قبیله نمی‌توان به هدف رسید:



برهان خلف. فرض کنید که با انتخاب ۵ قبیله بتوان به مقصود سؤال رسید. قبیله‌ها را مانند زیر تقسیم‌بندی کنید. طبق اصل لانه‌ی کبوتری از یک بخش قبیله‌ای انتخاب نمی‌شود (مثلاً بخش بالا چپ). در نتیجه باید خانه‌ی A و یکی از قبیله‌های مجاورش (B یا C) را انتخاب نمود. به همین صورت باید یکی از قبیله‌های D یا E نیز انتخاب شود (که در هر صورت D انتخاب بهتری خواهد بود) همچنین یکی از همسایه‌های آن نیز باید انتخاب شود که در هر حال F انتخاب بهتری خواهد بود. در نتیجه در ادامه با انتخاب یک قبیله‌ی دیگر نمی‌توان شرایط را برآورد کرد. پس حداقل انتخاب شش قبیله لازم است.

در نتیجه حداکثر تعداد قبیله‌های تنها برابر ۱۲ خواهد بود.