جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۹

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۲۰	-	۳۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۳۰ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- ده توپ داریم که روی آنها اعداد ۱ تا ۱۰ (هر عدد دقیقا روی یک توپ) نوشته شده است. همه‌ی توپ ها را به دل خواه خود داخل تعدادی سطل می‌ریزیم و سپس روی هـر سطل، جمع اعداد توپ های درونش را می‌نویسیم. با در نظر گرفتن همه‌ی حالات توزیع توپ‌ها، مجموعه‌ی اعداد نوشته شده روی سطل‌ها می‌تواند برابر چند تا از ۴ مجموعه‌ی زیر باشد؟

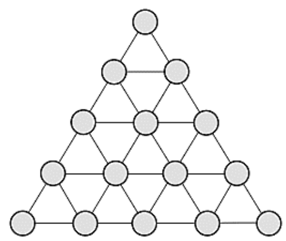
- {۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳}
- {۱، ۲، ۳، ۱۰، ۲۰، ۲۰}
- {۵، ۱۲، ۱۷، ۲۱}
- {۵، ۵، ۵، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰}

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۲- ۱۵ گل دان خالی را در یک ردیف چیده‌ایم. می‌خواهیم درون دقیقا ۴ تا از گل دان ها گل بگذاریم، طوری که بین هر دو گل دان پر حداقل دو گل دان خالی وجود داشته باشد. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

الف)۸۴ ب) ۱۲۶ ج)۳۵ د)۱۴۰ هـ) ۱۳۶۵

۳- شکل مقابل از ۱۵ توپ و ۳۰ میله تشکیل شده که هر میله دو توپ را به هم وصل می‌کند و هر توپ به ۴،۲ یا ۶ توپ دیگر وصل است. حداقل چند توپ را باید حذف کنیم به طوری که هر یک از توپ‌های باقی مانده حداکثر به دو توپ دیگر وصل باشد؟ دقت کنید وقتی یک توپ را حذف کنیم، میله‌هایی که یک سرشان این توپ باشد نیز حذف می‌شوند.

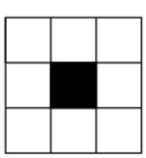


الف) ۸ ب) ۵ ج) ۴ د)۶ هـ) ۳

۴- علی می‌خواهد تعدادی عدد از چپ به راست بنویسد که با ۱ شروع و با ۲۰ تمام می‌شود و شامل اعداد ۵ تا ۱۰ نباشد. هم چنین به جز ۱ هر عدد یا یکی بیشتر از عدد قبلی خود (عددی که درست سمت چپ آن نوشته شده) باشـــد، یا دو برابر آن. او به چند روش مختلف می تواند این کار را انجام دهد؟

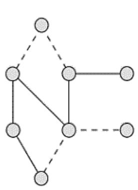
الف)۱۰ ب) ۵ ج)۶ د)۴ هـ) ۸

۵- به چند طریق می توان خانه‌های یک جدول ۵ × ۳ را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ آمیــزی کرد به نحـوی کـه شکـل سمت چپ در آن یافت نشود؟ این شکل شامل یک خانه‌ی سیاه و هشت خانه‌ی سفید مجاور آن است.



الف) ۳۲۵۷۷ ب) ۳۲۶۴۱ ج) ۳۲۷۶۹ د) ۳۲۷۶۸ هـ) ۳۲۵۷۶

۶- می‌خواهیم توپ‌های شکل مقابل را با رنگ های سبز، زرد و قرمز رنگ آمیزی کنیم، به طوری که هر دو توپی که با ممتد به هم وصل شده‌اند رنگ متفاوت داشته باشند، و هر دو توپــی که با خط چیـن به هم وصـل شـده‌اند هم رنگ باشند. به چنـد روش می‌تـوان ایـن کار را انجام داد؟



الف) ۶ ب) ۹ ج) ۱۸ د) ۱۲ هـ) ۳

۷- دستگاهی داریم که یک جدول ۴ × ۴ را که در هر خانه‌ای آن عددی صحیح نوشته شده به عنوان ورودی می گیرد، و در خروجی یک جدول ۴ × ۴ تحویل می دهد که مقدار خانه‌ی (i,j) از آن برابر است با مجمـوع خانه‌های مجـاور (i,j) در جدول ورودی. دو خانه مجاور هستند اگر ضلع مشترک داشته باشند. به عنوان مثال با توجه به شکل مقابل اگر ورودی نمونه را به دستگاه بدهیم، خروجی نمونه را تحویل خواهیم گرفت. محمد یک جدول به ورودی دستگاه داده که ما آن را ندیده ایم، ولی می دانیم دستگاه جدول خروجی اصلی (شکل مقابل) را در خروجی تحویل داده است. جمع اعداد نوشته شده در ۱۶ خانه‌ی جدولی که محمد به ورودی دستگاه داده چیست؟

۷	۲	۹	۳
۸	۶	۱۰	۶
۰	۱۳	۶	۵
۶	۳	۲	۷

خروجی نمونه

۱	۵	-۲	۴
۲	۳	۰	۵
۴	-۱	۴	۲
-۱	۲	۵	-۴

ورودی نمونه

۸	-۴	-۵	۲
۲	۰	۱	-۷
-۳	۵	۹	۵
۶	۰	۳	۹

خروجی اصلی

الف) ۱۰ ب) ۹ ج) ۸ د) ۶ هـ) ۷

کشور «k- منگولیا» ۲ شهر دارد که با شماره‌های ۰ تا $2^K - 1$ نام گذاری شده‌اند. در این کشور بعضی از جفت شهرها با جاده به هم وصل هستند. برای این که بدانیم دو شهر با شماره‌های x و y با یک جاده به هم وصل هستند یا خیر، ابتدا دو عدد x و y را در مبنای ۲ می نویسیم. اگر هر یک از دو عدد حاصل کمتر از k رقم داشت، تعداد مناسبی ۰ به سمت چپ آن اضافه می‌کنیم تا هر دوی آنها k رقمی شوند. نهایتا شهرهای x و y با یک جاده به هم متصل هستند اگر و تن‌ها اگر دو عدد به دست آمده دقیقا در یکی از k رقم با هم متفاوت بودند. مثلا در کشور ۴- منگولیا، بین شهرهای ۱ و ۹ جاده‌ی مستقیم وجود دارد چرا که $(\underline{0}001)_2$ و $(\underline{1}001)_2$ تن‌ها در رقم سمت چپ با هم تفاوت دارند، ولی شهرهای ۲ و ۹ جاده‌ی مستقیم ندارند چرا که $(\underline{0}0\underline{1}\underline{0})_2$ و $(\underline{1}0\underline{0}\underline{1})_2$ در سه رقم متفاوت هستند.

با توجه به توضیحات بالا به چهار سوال زیر پاسخ دهید:

۸- در کشور ۴- منگولیا می‌خواهیم به هر شهر یک رنگ اختصاص دهیم طوری که هیچ دو شهر مجاوری (که با جاده ی مستقیم متصل شده‌اند) هم رنگ نباشند. حداقل چند رنگ مختلف نیاز داریم؟

الف) ۲ ب) ۱۶ ج) ۸ د) ۳ هـ) ۴

۹- حداقل با چند رنگ می‌توانیم به هر یک از جاده های کشور ۷-منگولیا رنگی اختصاص دهیم، که به هیچ شهری دو جاده‌ی هم رنگ متصل نباشند؟

الف) ۸ ب) 2^7 ج) ۷ د) ۵ هـ) ۶

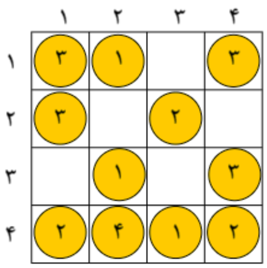
۱۰- در کشور ۱۰- منگولیا حداقل چند جاده را باید گل کاری کنیم طوری که به هر شهـر حداقـل یک جـاده‌ی گل کاری شده متصل باشد؟

الف) 2^{10} ب) ۱۱ ج) ۱۰ د) 2^9 هـ) ۹

۱۱- در کشور ۱۱- منگولیا حداقل چند شهر را باید چراغانی کنیم طوری که دست کم یکی از دو شهر متصل به هر جاده چراغانی باشد؟

الف) 2^9 ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۹ هـ) 2^{10}

یک جدول ۱۶ × ۱۶ را در نظر بگیرید که سطرها و ستون های آن به ترتیب شماره‌های ۱ تا ۱۶ گرفته اند. هر خانه می‌تواند خالی باشد یا درون آن یک سکه قرار گرفته باشد. روی هر سکه یک شماره بین ۱ تا ۱۶ نوشته شده است، اما از هر شماره حداکثر ۱۶ سکه در جدول وجود دارد. در شکل رو به رو مثالی از یک جدول ۴ × ۴ با ۱۱ سکه دیده می‌شود. توجه کنید که برای سادگی، دو شکل اول برای جدول ۴ × ۴ رسم شده‌اند. اما هر سه سوال را باید براساس جدول ۱۶ × ۱۶ پاسخ دهید.

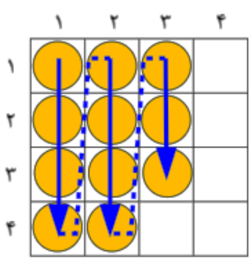


با توجه به توضیحات بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید:

۱۲- در یک سطر دل‌خواه، حداکثر چند سکه ممکن است وجود داشته باشد که عدد نوشته شده بر روی آنها برابر باشد؟ (در مثال بالا این عدد ۲ است).

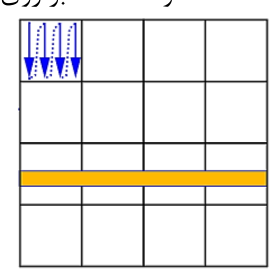
الف)۸ ب)۱ ج) ۲ د) ۴ هـ) ۱۶

۱۳- فرض کنید که تمام سکه های این جدول را برمی داریم و براساس عدد نوشته شده بر روی آنها به صورتی که در شکل نشان داده شده است به صورت مرتب می چینیم. در این نحوه مرتب سازی سکه ها از خانه‌ی (۱,۱) تا (۱۶,۱۶) مطابق شکل دنبال هم فرض می شوند (توجه کنید سکه ی واقع در (۱,۲) پس از سکه ی واقع در (۱۶,۱) فرض می شود. منظور از (۱,۲)خانه‌ی سطر ۱ و ستون ۲ است.) با این مرتب سازی، سکه هایی که عددشان برابر است پشت سر هم قرار می گیرند. پس از انجام این مرتب سازی، در یک سطر دل خواه حداکثر چند سکه ممکن است وجود داشته باشد که عدد نوشته شده بر روی آنها برابر باشد؟ (در جدول مثال اولیه، این عدد ۱ است.) .



الف)۱ ب)۸ ج) ۷ د) ۲ هـ) ۴

۱۴- فرض کنید که جدول اولیه را مطابق شکل زیر به ۱۶ جدول هر یک به اندازه‌ی ۴ × ۴ تقسیم می‌کنیم. اگر سکه های موجود در هر یک این جدول های کوچک تر ۴ × ۴ را (مستقل از بقیه جدول ها) مطابق مسئله‌ی قبل درون خود آن جدول‌ها مرتب کنیم، حال در یک سطر دل خواه، حداکثر چند سکه ممکن است وجود داشته باشد که عدد نوشته شده بر روی آنها برابر باشد؟



الف) ۲ ب) ۴ ج) ۱ د) ۷ هـ) ۸

دستگاه «ایکس-اُر» (XOR) دو عدد می‌گیرد و یک عدد برمی‌گرداند. این دستگاه ابتدا دو عدد ورودی را به مبنای ۲ می‌برد و با افزودن تعداد مناسبی صفر به سمت چپ عدد کوتاه تر، تعداد رقم های آن دو عدد را برابر می‌کند. سپس عدد دوم را زیر عدد اول (در دو سطر، شبیه وقتی که بخواهیم آنها را جمع کنیم) می‌نویسد به صورتی که رقم iام عدد اول بالای رقم iام عدد دوم قرار بگیرد. حال هر دو رقم را که در یک ستون قرار دارند مقایسه می‌کند: اگر مساوی بودند زیر آنها و در سطر سوم یک رقم ۰ می‌نویسد، و در صورتی که یکسان نبودند زیر آنها رقم ۱ می‌گذارد. در انتها با تبدیل عدد دودویی نوشته شده در سطر سوم از مبنای ۲ به مبنای ۱۰ و تحویل آن در خروجی، کار پایان می‌یابد. مثلا

اگر به دستگاه اعداد ۵ و ۱۲ را بدهیم، دستگاه با تبدیل آنها به مبنای دو، عدد های $(0101)_2$ و $(1100)_2$ را تولید کرده در دو سطر می‌نویسد و با توجه به آنها عدد $(1001)_2$ در سطر سوم درج خواهد شد و لذا دستگاه عدد ۹ را به عنوان خروجی برمی‌گرداند.

با توجه به توضیحات بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید:

۱۵- علی ۳۱ کارت با شماره‌های ۱ تا ۳۱ دارد. او هر بار یک جفت کارت را که مجموع شماره‌ی آنها برابر ۳۲ است انتخاب و شماره‌ی آن دو کارت را به ورودی دستگاه می دهد. اگر علی این کار را برای تمامی زوج کارت‌هایی که مجموع شماره‌شان ۳۲ است انجـام دهد. بزرگترین عددی که در خروجی دستگاه XOR ظاهر می شود چقدر است؟

الف) ۳۰ ب) ۹۳۰ ج) ۲۹ د) ۳۱ هـ) ۳۲

۱۶- برنامه‌ی زیر چه عددی را چاپ خواهد کرد؟

۱) s را برابر ۰ قرار بده.

۲) برای i از ۱ تا ۱۳۹۰، دو دستور زیر را اجرا کن:

۱٫۲) اعداد i و i+۱ را به ورودی دستگاه بده و عدد خروجی را در x قرار بده.

۲٫۲) اعداد x و s را به ورودی دستگاه بده و عدد خروجی را در s قرار بده.

۳) مقدار s را چاپ کن.

الف) ۱۳۹۱ ب) ۱۳۹۲ ج) ۱۳۹۰ د) ۰ هـ) ۱

۱۷- برنامه‌ی زیر چه عددی را چاپ خواهد کرد؟

۱) s را برابر ۰ قرار بده.

۲) برای i از ۱ تا ۹۰، دو دستور زیر را اجرا کن:

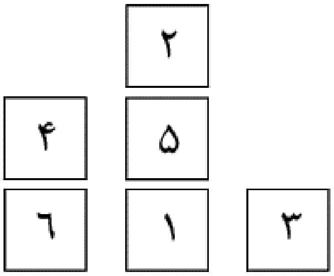
۱٫۲) اعداد i و i+۱ را به ورودی دستگاه بده و عدد خروجی را در x قرار بده.

۲٫۲) مقدار s+x را در s قرار بده.

۳) مقدار s را چاپ کن.

الف) ۹۰ ب) ۱ ج) ۵۶۴ د) ۲۰۲۵ هـ) ۵۶۵

۶ مکعب با شماره‌های ۱ تا ۶ و یک میز در اختیار داریم. هر مکعب را می‌توانیم یا به صورت مستقل روی میز بگذاریم یا دقیقا روی یک مکعب دیگر. به تعدادی از مکعب ها که از پایین به بالا روی هم قرار گرفته اند یک برج می گوییم. برای مثال در شکل مقابل، (۱,۵,۲) به ترتیب یک برج می‌سازند. یک «وضعیت»، یک نحوه‌ی شکل گیری برج‌هاست. جای برج‌ها نسبت به هم اهمیتی ندارد و فقط این مهم است که هر مکعب روی کدام مکعب (یا روی میز) است. مثلا در شکل اگر جای برج (۶,۴) با برج تکی (۳) عوض شود، وضعیت جدیدی را نمی سازد؛ اما اگر جای ۴ با ۶ عوض شود یک وضعیت جدید داریم.



با توجه به توضیحات بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید:

۱۸- ۶ مکعب چند وضعیت شامل دقیقا دو برج می توانند داشته باشند؟ چند وضعیت شامل دقیقا سه برج؟

الف) ۱۸۰۰ و ۹۶۰ ب) ۱۸۰۰ و ۱۲۰۰ ج)۴۴۶۴۰ و ۵۲۲۷۲۰
د)۲۱۶۰ و ۱۵۶۰ هـ) ۲۱۶۰ و ۲۱۶۰

۱۹- یک «حرکت»، شامل برداشتن بالاترین مکعب از یک برج و قرار دادن آن بر روی بالاترین مکعب برجی دیگر از مکعب ها یا روی میز است. (این دو کار با هم «یک» حرکت هستند.) مثـلا در شکل بالا می تـوان با یک حرکـت ۲ را روی ۳ یا روی ۴ و یا حتـی روی میز قرار داد. با حداقل چند حرکت می توان وضعیت شکل بالا را تبدیل به وضعیت تک- برج با اعداد صعودی ۱ تا ۶ از پایین به بالا (یعنی تن‌ها یک برج(۱,۲,۳,۴,۵,۶)) کرد؟ حداقل چند حرکت برای تبدیل وضعیت بالا به تک- برج نزولی از پایین به بالا (یعنی(۶,۵,۴,۳,۲,۱)) لازم است؟

الف) ۵ صعودی و ۶ نزولی ب) ۶ صعودی و ۶ نزولی ج) ۶ صعودی و ۷ نزولی
د) ۷ صعودی و ۷ نزولی هـ) ۷ صعودی و ۶ نزولی

۲۰- حداقل میزان K چه قدر باید باشد که مطمئن باشیم با حداکثر K حرکت هر وضعیت آغازینی از ۶ مکعب را می توانیم به هر وضعیت دیگری که از ما خواسته می شود، تبدیل کنیم؟

الف) ۶ ب) ۱۰ ج)۷ د) ۱۲ هـ) ۱۱

در بین شهرهای یک کشور، راه‌های خاکی و آسفالت کشیده شده‌اند. همه‌ی راه‌ها یک طرفه اند و ممکن است یک راه که از یک شهر خارج می‌شود به شهری دیگری وارد شود، یا آن که راه به صورت یک حلقه باشد و به همان شهر مبدا وارد شود. می دانیم که از هر شهر دقیقا یک راه خاکی و یک راه آسفالت خارج می‌شود، هم چنین امکان دارد هر دو راه خاکی و آسفالت خارج شده از یک شهر، به یک شهر یکسان وارد شوند.

هر شهر یا استقلالی است یا پرسپولیسی. لیلی ساکن شهر پایتخت کشور است و می‌خواهد با گرفتن یک «مسیر» که به صورت رشته‌ای از حرف های «خ» (مخفف خاکی) و «آ» (مخفف آسفالت) مشخص می‌شود، با شروع از پایتخت به ترتیب راه‌های مشخص شده در مسیر را بپیماید و به مقصد برسد. مثلا اگر مسیر او «خ آ خ آ» باشد، ابتدا راه خاکی خارج شده از پایتخت را طی کرده به شهر بعدی می‌رود (اگر آن راه خاکی حلقه باشد مجددا به پایتخت می‌رسد)، سپس راه آسفالت خارج شده از شهر دوم را طی کرده به شهر سوم می‌رود و در ادامه با پیمودن یک راه خاکی و یک راه آسفالت به مقصد می‌رسد. بر این اساس به سه سوال زیر پاسخ دهید. توجه کنید که مفروضات هر سوال متفاوت است، یعنی هر سوال کشور جداگانه‌ای را با شرایط ذکر شده توصیف می‌کند.

با توجه به توضیحات بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید:

۲۱- فرض کنید وضعیت راه‌های کشور طوری است که برای هر مسیر که تعداد«خ» های آن زوج است، مقصد لیلی یک شهر استقلالی، و در غیر این صورت مقصد وی پرسپولیسی باشد. مثلا مقصد مسیر «خ خ آ آ آ» استقلالی و مقصد «خ آ خ آ خ» پرسپولیسی است. این کشور حداقل چند شهر دارد؟

الف) ۲ ب) ۵ ج) ۴ د) ۶ هـ) ۳

۲۲- فرض کنید مقصد مسیرهایی استقلالی است که تعداد «خ»های آن مضربی از ۱۳۸۹ باشد، و در غیر این صورت مقصد پرسپولیسی باشد. این کشور حداقل چند شهر دارد؟

الف) ۶۹۴ ب) ۱۳۸۹ ج) ۲۷۷۸ د) ۱۳۸۸ هـ) ۱۳۹۰

۲۳- فرض کنید مقصد مسیر تن‌ها و تن‌ها وقتی استقلالی باشد که مسیر دقیقا ۲۰ راه خاکی متوالی (بدون راه آسفالت)، و یا دقیقا ۱۰ راه آسفالت متوالی (بدون راه خاکی) باشد. این کشور حداقل چند شهر دارد؟

الف) ۳۳ ب) ۳۱ ج) ۳۰ د) ۳۲ هـ) ۲۹

کف یک سالن به صورت جدول ۳ × ۳ و یا ۴ × ۴ از موزاییک هایی پوشیده شده که روی هر یک از آنها عدد ۰ و یا ۱ نوشته شده است. پنج روبات داریم که یکی از آنها دروغ گو و سایرین راست گو هستند.

ابتدا روبات دل خواهی را روی یکی از موزاییک ها (به دل خواه) می گذاریم و آن را روشن می‌کنیم. روبات هر بار عدد موزاییکی را که روی آن قرار دارد اعلام می‌کند و سپس به یکی از موزاییک های مجاور (که با آن ضلع مشترکی دارند) می‌رود. مسیر حرکت روبات توسط خودش تعیین می‌شود اما طوری حرکت می‌کند که روی هر موزاییک دقیقا یک بار قرار گیرد و پس از اعلام عدد همه‌ی موزاییک ها متوقف می‌شود. همین فرایند را برای روبات های دیگر، یکی پس از دیگری، انجام می‌دهیم.

با توجه به توضیحات بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید:

۲۴- ابتدا در یک سالن ۳ × ۳ فرایند بالا را انجام داده و عددهای اعلام شده توسط هر روبات را به ترتیب (از چپ به راست) در پنج گزینه‌ی زیر آورده ایم. می‌دانیم روبات های راستگو همواره عدد نوشته شده روی موزاییک ها را به درستی اعلام می‌کنند، اما روبات دروغ گو عدد حداقل یک موزاییک را نادرست می‌گوید. کدام گزینه مربوط به روبات دروغ گو می باشد؟

الف) ۱۰۱۱۰۱۱۰۱
ب) ۱۱۱۰۱۱۰۰۱
ج) ۱۰۱۱۱۰۰۱۱
د) ۱۱۱۰۱۱۱۰۰
هـ) ۱۱۰۱۱۱۱۰۰

۲۵- فرایند سوال قبل را در یک سالن ۴ × ۴ اجرا کرده ایم. این بار کدام گزینه، اعداد اعلام شده توسط روبات دروغگو است؟

الف) ۰۰۰۰۰۱۱۰۰۱۱۰۰۰۰۰
ب) ۰۰۰۱۰۰۱۰۰۱۰۰۱۰۰۱
ج) ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۱۱۱
د) ۱۰۰۰۰۰۰۱۱۰۰۰۰۰۰۱
هـ) ۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۱

۲۶- فرایند سوال قبل را در یک سالن ۴ × ۴ دیگر اجرا کرده ایم. این بار کدام گزینه، اعداد اعلام شده توسط روبات دروغگو است؟

الف) ۰۰۰۰۱۰۱۰۰۰۰۰۱۰۰۱
ب) ۰۰۰۰۰۱۰۱۰۱۰۱۰۰۰۰
ج) ۱۰۱۰۰۰۱۰۱۰۰۰۰۰۰۰
د) ۱۰۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۰۱۰
هـ) ۰۰۰۰۰۰۰۱۰۱۰۰۰۱۰۱

برنامه‌ی زیر را در در نظر بگیرید:

۱: عدد x را از ورودی بگیر.

۲: مقدار عددYرا برابر صفر قرار بده.

۳: باقی مانده‌ی تقسیم عدد X بر ۲ را B بگیر.

۴: مقدار Yرا برابر $B + Y \times ۲$ قرار بده. (مثلا اگر Y مساوی ۵ و B برابر ۱ است، مقدار Y برابر ۱۱ خواهد شد).

۵: مقدار X را برابر خارج قسمت تقسیم خودش بر ۲ قرار بده. (مثلا اگر X برابر ۱۳ بود، مقدار X به ۶ تغییر خواهد یافت).

۶: اگر X بزرگتر ازصفر است، به مرحله ۳ برو. در غیر این صورت به مرحله ۷ برو.

۷: مقدار Yرا به عنوان خروجی برگردان.

۸: پایان.

می‌بینیم اگر مقدار ۱۲ را به عنوان ورودی X بدهیم، خروجی برنامه برابر ۳ خواهد بود.

با توجه به توضیح بالا به چهار سوال زیر پاسخ دهید:

۲۷- فرض می‌کنیم اگر ورودی Xرا در مبنای دو بنویسیم به صورت X' (متشکل از ۰ و ۱) خواهد بود و اگر خروجی برنامه را در مبنای دو بنویسیم به صورت Y' خواهد بود. Y' همواره چه نسبتی با X' دارد؟

الف) تعداد «یک»های رشته‌ی X' است.

ب) تعداد «صفر»های رشته‌ی X' است.

ج) زیر رشته‌ای از X' است با حذف تعدادی از ارقام مبنای دوی X'.

د) مقسوم علیه‌ای از X' است.

هـ) برعکس شده (متقارن) X' است با حذف صفر های سمت چپ.

۲۸- اگر ورودی برنامه مقدار X باشد، خروجی متناظر آن را $R(X)$ می‌نامیم؛ مثلا طبق آنچه گفته شد مقدار $R(۱۲)$ برابر۳ است. مقدار $R(۴۴)$ کدام گزینه است؟

الف) ۱۱۱ ب) ۵۵ ج) ۵۹ د) ۵۷ هـ) ۱۲۳

۲۹- عدد A را زیبا می‌نامیم اگر $R(A) > A$ باشد. مثلا عدد ۱۱ یک عدد زیبا است چرا که $R(۱۱) = ۱۳$ و ۱۱>۱۳ است. اما عدد ۱۲ یا عدد ۷ زیبا نیستند. چند عضو از مجموعه‌ی {۶۳ ,... ,۳ ,۲ ,۱} زیبا هستند؟

الف) ۵ ب) ۱۲ ج) ۹ د) ۸ هـ) ۱۳

۳۰- چند تا از اعداد بین $۲^{۱۲}$ تا $۲^{۱۳}$ (شامل خود این دو عدد) زیبا هستند؟

الف) ۴۹۶ ب) ۹۹۲ ج) ۵۲۸ د) ۲۰۱۶ هـ) ۱۰۵۶

«پاسخنامه تشریحی»

۱- **گزینه‌ی (ج) درست است.**

مجموعه‌ی اول: ۹ ، ۱۰ ، ۸+۳، ۷+۵ و ۱+۲+۴+۶ پس می‌شود.

مجموعه‌ی دوم: مجموع اعداد ۱ تا ۱۰ برابر ۵۵ است در حالیکه مجموع این اعداد ۵۶ است. پس نمی‌شود.

مجموعه‌ی سوم: ۵، ۳+۹، ۱+۲+۴+۱۰ و ۶+۷+۸ پس می‌شود.

مجموعه‌ی چهارم: برای ساختن عدد ۵ باید از اعداد کوچکتر یا مساوی ۵ استفاده کرد. از آنجا که مجموع همه‌ی این اعداد ۱۵ است پس برای ۳ تا ۵ باید ۱+۴، ۳+۲ و ۵ استفاده کنیم. حال اعداد ۶ تا ۱۰ باقیمانده‌اند که مجموع هردو تا از آنها بیشتر از ۱۰ است، پس نمی‌توان.

۲- **گزینه‌ی (ب) درست است.**

۱۰ گلدان را طوری در نظر می‌گیریم که اولی و چهارمی و هفتمی و دهمی گل داشته باشند. در اینصورت بین هر دو گلـدان پر، دو گلدان خالی وجود دارد. حال باید ۵ گلدان دیگر را در بین این گلدان‌ها قرار دهیم. که معادل با حل معادله‌ی زیر است:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۵$$

که در آن تمامی متغیرها نامنفی هستند. جواب این معادله نیز برابر با ۱۲۶ است.

۳- **گزینه‌ی (د) درست است.**

۶ توپ لازم و کافی است.

- اثبات لزوم شرط: سه دایره‌ی داخلی را در نظر بگیرید. اگر هرکدام از آنها باقی بماند (مثلاً دایره‌ی پایین راست)، باید ۴تا از همسایه‌هایش حذف شوند (اگر هرکدام از دو دایره‌ی داخلی دیگر باقی بماند حداقل ۶ دایره حذف می‌شود). پس از حذف این رئوس ۴ راس با درجه‌ی سه باقی می‌ماند که باید حداقل دو راس دیگر حذف شوند که در نتیجه در مجموع ۶ دایره حذف شد. اگر همه‌ی رئوس میانی نیز حذف شوند ۶ راس درجه‌ی سه باقی مانده که با حذف هر راس حداکثر دو تا از آنها کم می‌شوند. در نتیجه حداقل باید سه راس دیگر حذف شوند.
- اثبات کافی بودن شرط: از مثلث داخلی (به طول دو) که برعکس است تمام رئوس آن را حذف کنید. در نتیجه سه مثلث به طول یک باقی می‌مانند که شرایط مسئله را دارند.

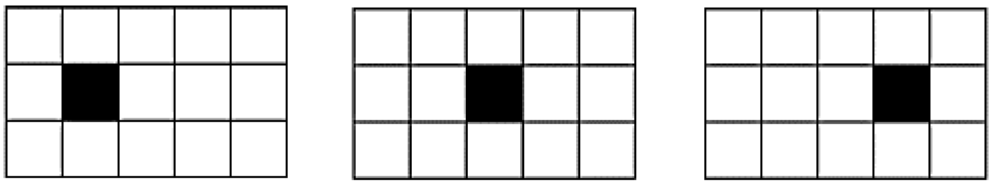
۴- **گزینه‌ی (ه) درست است.**

برای بدست آوردن تعداد حالات رسیدن به هر عدد کافیست مقدار حالات قبل از آن را بدانیم. در واقع برای رسیـدن به عدد k یا از k-۱ و یا از $\frac{k}{۲}$ (در صورت زوج بودن k) استفاده کرده‌ایم و تعداد حالات رسیدن به ۵ و ۱۰ نیز صفر است. پس جدول تعداد حالات رسیدن به اعداد بصورت زیر است:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۱	۱	۱	۲	۰	۱	۱	۳	۳	۰	۰	۱	۱	۲	۲	۵	۵	۸	۸	۸

۵- **گزینه‌ی (الف) درست است.**

تعداد جدول‌هایی که شامل آن شکل هستند را می‌شماریم. این جدول‌ها یکی از سه حالت زیر را دارند:



تعداد حالات هرکدام $۲^{۶}$ است، ولی تنها در یک حالت وضعیت اول و سوم یکسان خواهند شد. در نتیجه تعداد کل حالات نامطلوب برابر است با : $۳ \times ۲^{۶} - ۱$. پس جواب مسئله برابر $۲^{۱۵} - (۳ \times ۲^{۶} - ۱)$ می‌باشد که ۳۲۵۷۷ می‌شود.

۶- **گزینه‌ی (د) درست است.**

سه نقطه در بالا چپ و سه نقطه در پایین راست ناحیه‌ی همرنگ تشکیل داده‌اند که رنگ آنها با یکدیگر فرق دارد. پس از ایـن رنگ‌آمیزی دو نقطه باقی می‌مانند که یکی یک حالت و دیگری دو حالت دارد. در نتیجه در کل ۱۲ حالت خواهیم داشت.

۷- **گزینه‌ی (ج) درست است.**

فرض کنید خانه‌های جدول ورودی را به ترتیب از چپ به راست و سپس از بالا به پایین شماره‌گذاری کرده‌ایم.

در شکل زیر در هر خانه از جدول شماره خانه‌هایی از جدول ورودی که در آن خانه از جدول خروجی مجموعشان بدست می‌آید نوشته شده است:

۲ ، ۵	۱ ، ۶ ، ۳	۲ ، ۷ ، ۴	۳ ، ۸
۱ ، ۶ ، ۹	۲ ، ۵ ، ۷ ، ۱۰	۳ ، ۶ ، ۸ ، ۱۱	۴ ، ۷ ، ۱۲
۵ ، ۱۰ ، ۱۲	۶ ، ۹ ، ۱۱ ، ۱۴	۷ ، ۱۰ ، ۱۲ ، ۱۵	۸ ، ۱۱ ، ۱۶
۹ ، ۱۴	۱۰ ، ۱۲ ، ۱۵	۱۱ ، ۱۴ ، ۱۶	۱۲ ، ۱۵

حالا با انتخاب خانه‌های تیره و جمع زدن اعداد داخل آنها در جدول خروجی هر عدد از جدول ورودی یک بار آمده است و مجموع این سه عدد مجموع کل را می‌دهد.

۸- **گزینه‌ی (الف) درست است.**

این کشور با دو رنگ، قابل رنگ آمیزی است. اعدادی که مجموع ارقام آنها فرد هستند را به رنگ ۱ و بقیـــه اعداد (با مجموع ارقام زوج) را به رنگ ۲ رنگ آمیزی می‌کنیم. با این روش هر دو عدد مجاوری (چون دقیقاً در یک رنگ متفاوت‌اند) در دو دسته قرار دارند و ناهمرنگ هستند.

۹- **گزینه‌ی (ج) درست است.**

چون درجه هر راس ۷ است پس جواب کمتر از ۷ نیست و با روش زیر با ۷ رنگ گـراف را رنـگ می‌کنیـم پس ۷ رنگ لازم و کافی است.

روش:

اگر دو عدد فقط در بیت i ام متفاوت بودند با رنگ i یال بین آن‌ها را رنگ می‌کنیم و چون هر بیت دو حالت دارد هر عدد دقیقاً با یک عدد دیگر فقط در بیت i ام متفاوت است پس هر راس از هر رنگ دقیقاً یک یال خواهد داشت.

۱۰- **گزینه‌ی (د) درست است.**

جاده‌هایی که برای تفاوت بیت اول کشیده شده‌اند را گل‌کاری می‌کنیم. هر عدد با یک عدد دیگر در بیت اول متفاوت است پس همه‌ی شهرها پوشش داده می‌شوند. همچنین هر جاده می‌تواند دو شهر را پوشش دهد و در کل 2^{10} شهر داریم پس 2^{9} جاده گل‌کاری شده لازم است.

۱۱- **گزینه‌ی (ه) درست است.**

2^{11} شهر داریم که به هریک ۱۱ جاده متصل است. پس در کل $2^{10} \times 11$ جاده داریم و با چراغانی کردن هر شهر شرط برای ۱۱ جاده متصل به آن برقرار می‌شود. پس 2^{10} شهر چراغانی شده لازم است.

حال اگر شهرهایی که شماره‌ی آنها تعداد زوجی یک دارد را چراغانی کنیم شرط سوال برای همه‌ی جاده‌ها برقرار می‌شود. زیرا هر جاده بین دو شهر کشیده شده‌است که شماره‌ی آنها به جز در یک بیت یکسان است. پس زوجیت تعداد یک‌های آنها با هم متفاوت است و یکی از آنها چراغانی شده است. بنابراین 2^{10} شهر چراغانی کافی است.

۱۲- **گزینه‌ی (ه) درست است.**

همه‌ی سکه‌های با یک شماره می‌توانند در یک ردیف باشد. در نتیجه جواب برابر ۱۶ است.

۱۳- **گزینه‌ی (الف) درست است.**

تمام سکه‌ها با عدد برابر پشت سر هم قرار دارند. برای اینکه دوتا از آنها در یک سطر باشند باید بین آنها ۱۵ سکه وجود داشته باشد که چون از هر عدد ۱۶ سکه داریم چنین چیزی ممکن نیست. پس در یک سطر هیچ دو سکه‌ی یکسانی وجود ندارد.

۱۴- **گزینه‌ی (د) درست است.**

اگر در ۱۶ خانه‌ی اول، ۱۶ خانه‌ی دوم و ۱۶ خانه‌ی سوم ۵ سکه با شماره‌ی یک و در ۱۶ خانه‌ی چهارم یک سکه با شماره‌ی یک داشته باشیم در ردیف اول ۷ عدد سکه با شماره یک قرار می‌گیرد.

در یک قسمت 4×4 جدول اگر بخواهیم حداکثر تعداد سکه‌های یکسان در یک ردیف یک باشد حداقل یک سکه، اگر بخواهیم این مقدار ۲ باشد حداقل به ۵ سکه و در کل اگر بخواهیم این مقدار i باشد به $4i - 3$ سکه یکسان نیاز داریم. حال اگر بخواهیم ۸ عدد سکه‌ی یکسان در یک ردیف داشته باشیم ابتدا در هر 4×4 یک سکه قرار می‌دهیم. از این به بعد برای اضافه کردن یک واحد به تعداد حداکثر سکه‌های موجود در یک سطر باید این مقدار را برای یکی از 4×4 زیاد کنیم. یعنی برای هر واحد زیاد کردن آن به ۴ سکه نیاز داریم و چون ۱۲ سکه دیگر داریم این مقدار به ۸ نمی‌رسد.

۱۵- **گزینه‌ی (الف) درست است.**

اعداد ما حداکثر ۵ بیتی هستند. پس خروجی هم ۵ بیتی است. همچنین اگر دو عدد در تمام بیت‌ها متمایز باشند جمع آنها ۳۱ می‌شود (چرا؟). پس اعدادی که علی به دستگاه می‌دهد حداقل در یک بیت یکسان‌اند و در نتیجه عدد خروجی نمی‌تواند ۳۱ باشد.

حال اگر اعداد ۱ و ۳۱ را به دستگاه بدهد عدد خروجی ۳۰ می‌شود. پس ۳۰ بیشترین مقدار خروجی است.

۱۶- **گزینه‌ی (ج) درست است.**

مقدار s در هر مرحله این‌گونه بدست می‌آید:

می‌دانیم در صورتی که در XOR یک عدد دوبار ظاهر شود خنثی می‌شود و همانند آن است که ظاهر نشده است. در نتیجه در طی این عملیات تمامی اعداد به جز عدد آخر دوبار ظاهر می‌شوند و در نتیجه در انتها عدد نهایی یعنی ۱۳۹۰ باقی می‌ماند.

۱۷- گزینه‌ی (ج) درست است.

این الگوریتم مجموع XOR زوج‌های متوالی از ۱ تا ۹۰ را حساب می‌کند.

کم ارزش‌ترین بیت دو عدد متوالی با هم متفاوت‌اند. پس XOR آنها حتماً فرد است.

مقدار این XOR برای ۱ و ۲ برابر ۳ و برای سایر زوج اعداد نیز بزرگتر از صفر است. پس حاصل جمع XORها از ۹۰ بیشتر خواهد بود.

چون همه‌ی این اعداد فرد هستند و تعداد آنها ۹۰ تا است مجموع آنها زوج می‌شود.

تنها گزینه‌ای که این شرایط را دارد گزینه‌ی (ج) است.

۱۸- گزینه‌ی (ب) درست است.

برای دو ستون تعداد مکعب‌های ستون کوچکتر ۱، ۲ یا ۳ می‌باشد که تعداد حالات چیدن مکعب‌ها در این وضعیت‌ها به ترتیب ۷۲۰، ۷۲۰ و ۳۶۰ می‌باشد که مجموع آنها ۱۸۰۰ می‌باشد.

برای سه ستون تعداد مکعب‌های ستون‌ها ۲-۲-۲ یا ۱-۲-۳ و یا ۱-۱-۴ است.

تعداد حالات چیدن مکعب‌ها در حالت اول ۱۲۰، در حالت دوم ۷۲۰ و در حالت سوم ۳۶۰ است.

پس مجموع تعداد حالات برای سه ستون ۱۲۰۰ می‌باشد.

۱۹- گزینه‌ی (د) درست است.

برای رساندن به حالت صعودی: مکعب ۵ باید از بالای ۱ خارج شود و برای این کار دو حرکت لازم است (جابجایی ۲ و ۵). سپس هر مکعب در طی یک حرکت می‌تواند سرجای خود قرار گیرد (۷ حرکت)

برای رساندن به حالت نزولی: مکعب ۴ باید از بالای ۶ و مکعب ۲ باید از بالای ۵ خارج شود. سپس هر مکعب در طی یک حرکت می‌تواند سر جای خود قرار گیرد (۷ حرکت).

۲۰- گزینه‌ی (ب) درست است.

جواب ۱۰ حرکت است.

شرط لازم: اگر بخواهیم "۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱" را به "۱، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲" تبدیل کنیم به ۱۰ حرکت نیاز داریم. چون با ۵ حرکت مکعب ۱ روی میز قرار می‌گیرد و هیچ‌کدام از دیگر مکعب‌ها به درستی روی هم قرار نگرفته‌اند. پس ۵ حرکت دیگر لازم است تا همگی روی مکعب ۲ قرار گیرند.

شرط کافی: برای ساختن هر ترتیبی ابتدا با حداکثر ۵ حرکت ۶ ستون یک مکعبی می‌سازیم و سپس با ۵ حرکت مکعب‌ها را به ترتیب روی مکعبی که باید زیر باشد می‌چینیم.

۲۱- گزینه‌ی (الف) درست است.

با یک شهر که ممکن نیست. چون باید هم جاده‌ی خاکی و هم آسفالت به خود شهر برود که در این صورت شهر نه می‌تواند استقلالی باشد نه پرسپولیسی. ولی برای دو شهر به سادگی می‌توان یک مثال ساخت که شامل یک شهر استقلالی و یک شهر پرسپولیسی باشد. کافیست که مسیر خاکی شهر را تغییر دهد و مسیر آسفالت به همان شهر برگردد.

۲۲- گزینه‌ی (ب) درست است.

جواب ۱۳۸۹ است.

شرط لازم: در گراف، کوچکترین دوری را بیابید که شامل حداقل یک (خ) باشد. می‌دانیم (خ)های دور حداقل ۱۳۸۹ تا است در غیر اینصورت با هر مضربی از آن عدد نیز می‌توان به شهر استقلالی رسید. از طرفی چون کوچکترین دور را در نظر گرفتیم هیچ شهر تکراری نداریم، پس تعداد رئوس حداقل ۱۳۸۹ است.

شرط کافی: ۱۳۸۹ راس در نظر بگیرید که با جاده‌های خاکی یک دور کامل ساخته‌اند. مسیرهای آسفالت هر شهر به خودش ختم می‌شود. بدین ترتیب شهر پایتخت استقلالی است و بقیه‌ی شهرها پرسپولیسی خواهند بود.

۲۳- گزینه‌ی (ب) درست است.

وضعیت هر حالت باید در راسی که قرار دارد ذخیره شود در مجموع ۱۰ حالت برای راه آسفالت و ۲۰ حالت برای راه آسفالت وجود دارد. این دو حالت تنها در شهر مقصد با یکدیگر مشترک هستند. از طرفی یک حالت برای شروع وجود دارد (حالت صفر) و یک حالت هم باید وجود داشته باشد که در غیر حالات مورد نظر به آنها برود و بین حالات قبلی تکرار نشود. پس در مجموع حداقل ۳۱ شهر مورد نیاز است.

مثال: شهر پایتخت به شهر استقلالی دو مسیر دارد. یکی به طول ۲۰ که با راه‌های خاکی هرکدام به بعدی متصل است و دیگری به طول ۱۰ که با راه‌های آسفالت پشت سرهم قرار دارند. مسیرهای اشتباه نیز به حالت غیر مجاز می‌رود که از قبل یک راس برای آن در نظر می‌گیریم.

۲۴- گزینه‌ی (ه) درست است.

فرض می‌کنیم جدول را شطرنجی رنگ کرده‌ایم. در جایگاه‌های فرد ربات‌ها در یک رنگ و در جایگاه‌های زوج در رنگ دیگر هستند. اگر تعداد یک‌های خانه‌های همرنگ در یک گزینه با بقیه گزینه‌ها متفاوت باشد آن ربات دروغ‌گو خواهد بود:

الف) ۴ و ۲

ب) ۴ و ۲

ج) ۴ و ۲

د) ۴ و ۲

ه) ۳ و ۳

پس گزینه‌ی (ه) دروغ است.

۲۵- گزینه‌ی (ب) درست است.

تعداد یک‌ها در گزینه‌ی ب با بقیه فرق دارد. در نتیجه گزینه‌ی ب دروغ است.

۲۶- گزینه‌ی (الف) درست است.

همانند سوال ۲۶ عمل می‌کنیم. باز هم تعداد یک‌های جایگاه‌های فرد و زوج را با بقیه گزینه‌ها مقایسه می‌کنیم تا گزینه‌ی دروغ مشخص شود:

الف: ۳ و ۱

ب: ۰ و ۴

ج: ۴ و ۰

د: ۴ و ۰

ه: ۰ و۴

پس گزینه‌ی (الف) دروغ است.

۲۷- **گزینه‌ی (ه) درست است.**

این الگوریتم برای عدد x آن را بگونه‌ای به مبنای ۲ می‌برد که رقم سمت راست پر ارزش‌ترین بیت باشد پس در واقع مقداری دودویی
عدد را متقارن می‌کند.

۲۸- **گزینه‌ی (ه) درست است.**

طبق ۲۷: ۴۴۴ در مبنای دو برابر با (۱۱۰۱۱۱۱۰۰) است که برعکس آن (۱۱۱۱۰۱۱) می‌شود که همان ۱۲۳ است.

۲۹- **گزینه‌ی (ج) درست است.**

ابتدا اعدادی که یکانشان صفر هست را حذف می‌کنیم. چرا که در طی این عملیات تعداد ارقام کمتری دارند و در نتیجه عدد نهایی کمتر از قبل خواهد شد.

در بین بقیه‌ی اول، اعداد متقارن (عددی که $R(A) = A$) را حذف می‌کنیم. از باقی اعداد دقیقاً نصفشان زیبا هستند چرا که دو به دو با یکدیگر جفت هستند و پس از اعمال تغییر به دیگری تبدیل می‌شوند.

اعداد فرد: ۳۲ تا

اعداد متقارن فرد: رقم یکان این اعداد یک هست. در نتیجه با توجه به اینکه طول عدد، بین ۱ تا ۶ باشد به ترتیب ۱، ۱، ۲، ۲، ۴ و ۴ تا عدد متقارن داریم. در نتیجه تعداد آنها ۱۴ تاست.

پس طبق نکات گفته شده تعداد اعداد زیبا برابر است با $۹ = \frac{۳۲ - ۱۴}{۲}$.

۳۰- **گزینه‌ی (ب) درست است.**

طبق نکاتی که در سوال ۲۹ گفته شد:

اعداد فرد: $۲^{۱۱}$.

اعداد متقارن فرد: چون رقم سیزدهم این اعداد یک است پس ۱۱ رقم دیگر باقی می‌ماند که $۲^{۶}$ عدد بدست می‌آید (۵ رقم دیگر بصورت یکتا مشخص می‌شوند).

در نتیجه تعداد اعداد زیبا برابر است با $۹۹۲ = \frac{۲^{۱۱} - ۲^{۶}}{۲}$