



دفترچه سوالات مرحله اول

دومین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۰

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مسأله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۲۰	۵	-

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل ۵ مسأله‌ی تشریحی و وقت آن ۱۲۰ دقیقه است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- عدد اعشاری M و عدد طبیعی N با فرض $10^{-N} \leq M \leq 10^N$ داده شده‌اند. الگوریتمی ارائه دهید تا با دریافت M و N عدد وارون M را به دست آورد. عدد X وارون عدد M است اگر ارقام X از راست به چپ همان ارقام M از چپ به راست باشد و تعداد ارقام بعد از ممیز X و M یکسان باشد. مثلاً عدد $۷۲۵/۴۳$ وارون عدد $۳۴۵/۲۷$ است.

۲- فرض کنید $A = a, b, c$ یک مجموعه سه‌عضوی باشد.
 الف) تعداد رابطه‌های هم‌ارزی را که می‌توان بر مجموعه A تعریف کرد با ذکر دلیل به دست آورید.
 ب) یک رابطه هم‌ارزی بر مجموعه $A = a_1, \dots, a_n$ داده شده است. الگوریتمی بنویسید تا کلیه رابطه‌های هم‌ارزی بر $A \cup a_{n+1}$ را که از رابطه فوق ساخته می‌شوند به دست آورد (رابطه فوق زیرمجموعه آن است).

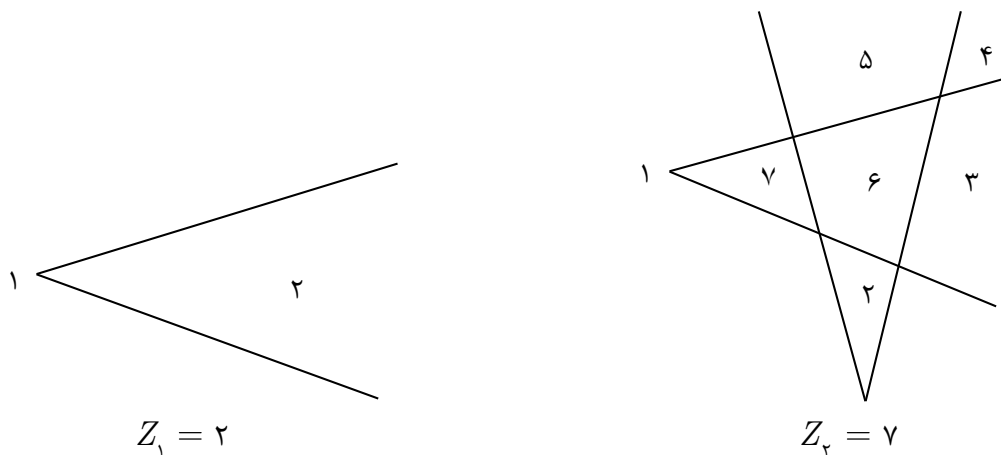
۳- الف) حداکثر تعداد منطقه‌هایی را که با کشیدن n خط در یک صفحه می‌توان به دست آورد برحسب n به دست آورید و آن را با R_n نشان دهید.

واضح است که $R_0 = 1$, $R_1 = 2$ و $R_2 = 4$.

ب) حداکثر تعداد منطقه‌های محدود را که با کشیدن n خط در صفحه می‌توان به دست آورد برحسب n به دست آورید و آن را با B_n نشان دهید.

واضح است که $B_0 = B_1 = B_2 = 0$ و $B_3 = 1$ و $B_4 = 3$.

پ) حداکثر تعداد منطقه‌هایی را که با کشیدن n عدد زاویه با زاویه‌های دلخواه در یک صفحه می‌توان به دست آورد برحسب n به دست آورید و آن را با Z_n نشان دهید.



۴- فرض کنید m و k دو عدد طبیعی باشند، $k \leq m$.

الف) تعداد جواب‌های طبیعی معادله زیر را برحسب k و m به دست آورید. $(x_1 \text{ تا } x_k \text{ طبیعی و مجهول هستند})$

$$\sum_{i=1}^k x_i = m$$

ب) اگر L عددی طبیعی باشد تعداد جواب‌های طبیعی معادله بالا را که در شرط $x_1 \leq L$ صدق می‌کنند به دست آورید.

- ۵- یک ملکول شیمیایی را که از تعدادی اتم و پیوندهای بین آنها تشکیل شده است در نظر بگیرید. یک ماکت برای این مولکول ساخته‌ایم که در آن از تعدادی گوی به جای اتم‌ها و تعدادی میله به جای پیوندها استفاده شده است.
- فرض کنید بین هر دو اتم مرتبط به هم بیش از یک پیوند نیست. می‌خواهیم در این ماکت میله‌ها را با دو رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که در هر اتم که بیش از یک میله بدان متصل است هر دو رنگ ظاهر شوند.
- الف) ثابت کنید درحالتی که تعداد اتم‌ها فرد و هر اتم دقیقاً به دو اتم دیگر وصل باشد این رنگ‌آمیزی امکان‌پذیر نیست.
- ب) ثابت کنید درحالتی که تعداد میله‌هایی که به هر اتم وصل شده است زوج باشد (به جز حالت الف) این رنگ‌آمیزی امکان‌پذیر است.
- پ) ثابت کنید که درحالت کلی به جز حالت الف این رنگ‌آمیزی امکان‌پذیر است.