جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
هجدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۶

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۲۴۰	-	۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

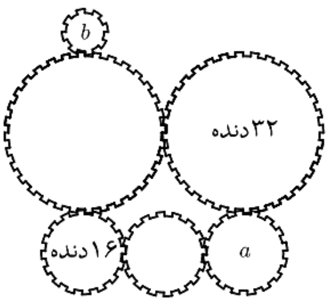
- این آزمون شامل **۴۰ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- جدول ۴×۲ زیر را در نظر بگیرید. به تعدادی خانه از این جدول که محیط آن‌ها یک مستطیل تشکیل بدهد، یک زیر مستطیل گفته می‌شود. مثلاً هر خانه از این جدول، خود به تنهایی یک زیر مستطیل است؛ هم چنین کل جدول نیز یک زیر مستطیل است. برای هر زیر مستطیل از این جدول, اعداد درون آن زیر مستطیل را جمع کرده و روی یک کاغذ می‌نویسیم، سپس تمام اعداد روی کاغذ را حساب می‌کنیم. حاصل این جمع چه قدر می‌شود؟

۱	۲	۰	۵
-۵	۰	-۲	۰

الف) -۸ ب) ۸ ج) ۱۲ د) ۴۸ ه) ۵۶

۲- طبق شکل زیر تعدادی چرخ دنده داریم که باهم درگیر هستند. چند دور و در کدام جهت باید چرخ دنده‌ی b را بچرخانیم تا چرخ دنده‌ی a دقیقا یک دور ساعت گرد بچرخد؟ تعداد دنده‌های چرخ دنده‌ی کوچک ۸, چرخ دنده‌های متوسط ۱۶ و چرخ دنده‌های بزرگ ۳۲ است.



الف) ۱ دور ساعت گرد

ب) ۱ دور پادساعت گرد

ج) ۲ دور ساعت گرد

د) ۲ دور پادساعت

ه) نمی توان چرخ دنده‌ی a را چرخاند

۳- کشور یک طرفه‌ها، پنج شهر به شماره‌های ۱ تا ۵ دارد. تن‌ها در صورتی می‌توان از شهر i به شهر j یک جاده‌ی یک طرفه کشید، که $i < j$ باشد؛ در صورت ساخت چنین جاده‌ای، با استفاده از این جاده می‌توان از شهر i به شهر j رفت، ولی نه بر عکس. به چند طریق می‌توان تعدادی جاده‌ی یک طرفه در این کشور ساخت به طوری که، از هر کدام از شهرهای ۱ تا ۴ دقیقاً یک مسیر (تشکیل شده از یک یا چند جاده‌ی پشت سر هم) به شهر ۵ وجود داشته باشد؟

الف) 2^{10} ب) 4^{4} ج) 5^{5} د) ۲۴ ه) ۵

۴- کشور یک طرفه‌های مسئله‌ی قبل (که شرط وجود جاده از شهر i به شهر j، عبارت است از $i < j$) را در نظر بگیرید. حال تعداد روش‌های ساخت تعدادی جاده‌ی یک طرفه در این کشور را حساب کنید، به طوری که دو شرط زیر را داشته باشند:

از هر کدام از شهرهای ۱ تا ۴، دقیقاً یک مسیر (شامل یک یا چند جاده‌ی یک طرفه) به شهر ۵ وجود داشته باشد (همان شرط مسئله‌ی قبل).

به ازای هر شهر، مجموع تعداد جاده‌هایی که از آن شهر شروع می‌شوند، به علاوه‌ی تعداد جاده‌هایی که به آن شهر ختم می‌شوند، از سه تا بیشتر نباشد.

الف) 2^{9} ب) 4^{2} ج) ۲۴ د) ۱۸ ه) ۴

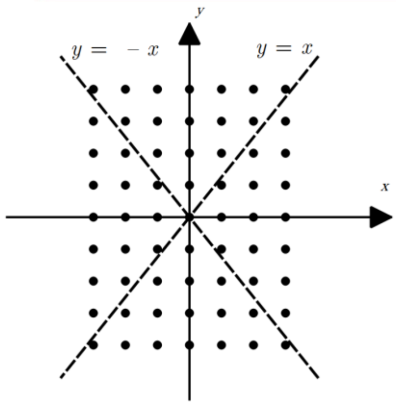
۵- می‌خواهیم روباتی سفارش دهیم که قادر باشد از مبدأ مختصات صفحه (مانند شکل) به تمام نقاطی که مختصات صحیح دارند برود. برای این کار روبات باید دارای زیر مجموعه‌ای از قابلیت‌های زیر باشد. قیمت روبات برابر است با مجموع قیمت‌های قابلیت‌هایی که برای آن سفارش می‌دهیم. قیمت هر قابلیت نیز روبه‌روی آن در فهرست زیر درج شده است.

یک واحد حرکت به راست، ۳۰۰۰۰ تومان

یک واحد حرکت به بالا، ۳۰۰۰۰ تومان

یک واحد حرکت به پایین، ۲۰۰۰۰ تومان

یک واحد حرکت به چپ، ۲۰۰۰۰ تومان



تقارن نسبت به محور x، ۲۰۰۰۰ تومان $(x,y) \longrightarrow (x,-y)$

تقارن نسبت به محور y، ۲۰۰۰۰ تومان $(x,y) \longrightarrow (-x,y)$

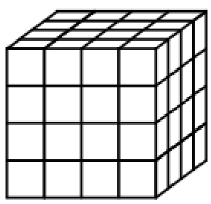
تقارن نسبت به خط y=x، ۱۰۰۰۰ تومان $(x,y) \longrightarrow (y,x)$

تقارن نسبت به خط y=-x، ۱۰۰۰۰ تومان $(x,y) \longrightarrow (-y,-x)$

حداقل قیمت روبات را تعیین کنید.

الف) ۳۰۰۰۰ تومان ب) ۴۰۰۰۰ تومان ج) ۵۰۰۰۰ تومان د) ۶۰۰۰۰ تومان ه) ۷۰۰۰ تومان

۶- یک کیک به شکل یک مکعب ۴×۴×۴ داریم. در هر مرحله می‌توانیم یک صفحه از فضا (موازی با یکی از وجه‌های کیک)، برای برش انتخاب کنیم. اگر صفحه‌ی برش از قطعه کیکی عبور کند، آن قطعه را به دو قسمت تقسیم می‌کند. بین هر دو مرحله، می‌توانیم بخش‌های مختلف کیک که از هم جدا شده‌اند، هر طوری که خواستیم (با انتقال و دوران) در فضا کنار هم قرار دهیم و دوباره عمل برش (مرحله‌ی بعد) را انجام دهیم.



دقت کنید که ممکن است چند قطعه‌ی تقسیم شده از قبل، با یک برش هم‌زمان به دو قسمت تقسیم شوند. حداقل چند مرحله لازم داریم تا این مکعب به ۶۴ مکعب $۱ \times ۱ \times ۱$ تقسیم شود؟

الف)۵ ب)۶ ج)۷ د)۸ ه)۹

۷- در مهمانی که علی آقا ترتیب داده است، ۱۲ نفر شرکت کرده‌اند. در موقع ورود مهمان‌ها، هر کدام یک شماره متمایز از اعداد ۱ تا ۱۲ می‌گیرند. مهمان‌ها دور یک میز دایره‌ای می‌نشینند. قرار است علی آقا یک ظرف شیرینی برای پذیرایی ببرد، اما برداشتن شیرینی، هرکس به شماره خودش و نفر سمت و نفر سمت راستش نگاه می‌کند و به تعداد شماره بیشتر، از ظرف شیرینی بر می‌دارد. علی آقا حداقل چند عدد شیرینی باید در ظرف قرار دهد به طوری که در هر نحوه نشستن، هر کس بتواند تعداد گفته شده در بالا را از آن بردارد؟

الف) ۷۸ ب) ۱۱۴ ج) ۴۲ د) ۱۵۶ ه) ۷۲

۸- در هر خانه‌ی یک جدول ۷×۷ عدد ۰ یا ۱ قرار دارد. برای هر ستون اگر تعداد ۱ها در آن بیشتر بود، زیر آن ستون عدد ۱ و در غیر این صورت عدد ۰ را می‌نویسیم. به همین صورت، برای هر سطر نیز اگر تعداد ۱ هـای آن بیشتر بود، در سمـت راست آن سطر عدد ۱ و در غیر این صورت عدد ۰ را می‌نویسیم. بعد از به دست آمدن اعداد سطرها و ستون‌ها، تمام اعداد داخل جدول پاک می‌شوند. اگر اعداد جدول زیر به این صورت به دست آمده باشند، حداقل و حداکثر در چند خانه‌ی جدول عدد ۱ قرار داشته است؟

							۰
							۰
							۰
							۰
							۰
							۱
							۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	

الف) حداقل ۲۰ و حداکثر ۲۷

ب) حداقل ۲۲ و حداکثر ۲۷

ج) حداقل ۲۰ و حداکثر ۲۹

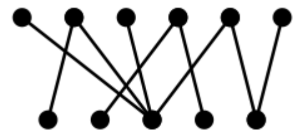
د) حداقل ۲۲ و حداکثر ۲۹

ه) هیچ کدام

۹- یک شمارنده‌ی ۳ رقمی داریم که با هر بار زدن دکمه‌ی آن، عدد آن یک واحد افزایش می‌یابد. عدد روی شمارنده در ابتدا، ۲۳۳ است. دکمه‌ی آن را ۶۹۳ بار می‌زنیم تا عدد شمارنده برابر ۹۲۶ شود. این ۳ رقم شمارنده در مجموع چند بار تغییر کرده‌اند؟

الف) ۶۹۳ ب) ۷۰۳ ج) ۷۶۹ د) ۷۷۲ ه) ۸۲۷

۱۰- می‌خواهیم نقاط شکل روبه‌رو را آبی یا قرمز کنیم به طوری که، هیچ دو نقطه‌ای که با یک پاره خط به هم وصل هستند، هم رنگ نباشند. اختلاف تعداد نقاط آبی و تعداد نقاط قرمز حداکثر چقدر است؟

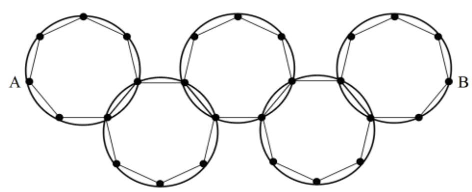


الف)۱ ب)۲ ج)۳ د)۴ ه)۵

۱۱- دانش آموزان یک کلاس ۳۰ نفره، در یک آزمون شرکت کرده‌اند. در این آزمون بالاترین نمره ۲۰ و پایین‌ترین نمره ۵ بوده است. در ضمن می‌دانیم می‌دانیم میانگین نمرات ۱۲ و نمره‌ی ۱۰ امِ کلاس ۱۵ بوده است. در این کلاس، حداکثر چند نفر نمره‌ی کمتر از ۱۰ گرفته‌اند؟

الف) ۱۳ ب) ۱۵ ج) ۱۷ د) ۱۹ ه) ۲۰

۱۲- در نقشه‌ی روبه‌رو، نقاط پررنگ نشان دهنده‌ی شهر و کمان‌ها و پاره خط‌های مستقیم بین آن‌ها جاده هستند. برای ما استفاده از جاده‌های مستقیم و کمانی تفاوتی ندارد. به چند طریق می‌توان با کم‌ترین تعداد جاده از شهر A به شهر B رفت؟
(دقت کنید که صرفاً تعداد جاده‌ها مهم است و بین بعضی از شهرها دو یا سه جاده قرار دارد.)

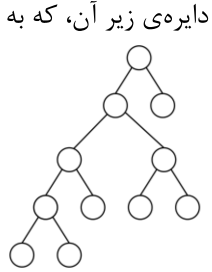


الف) $۲^۷\times۳^۴$ ب) $۲^۸\times۳^۳$ ج) $۲^{۱۱}\times۳^۴$ د) $۳^{۱۱}\times۲^۷$ ه) $۶^۴\times۲^۵$

۱۳- روی یک دستگاه n عدد کلید و یک نمایش‌گر قرار دارد. در ابتدا هر کدام از کلیدها یا روشن است یا خاموش و نمایش‌گر همیشه تعداد کلیدهای روشن را نشان می‌دهد. ما از وضعیت روشن یا خاموش بودن کلیدها اطلاع نداریم و در هر مرحله تن‌ها می‌توانیم یک کلید دل خواه را تغییر وضعیت دهیم. حداکثر در طی چند مرحله می‌توانیم تمام کلیدها را روشن کنیم؟

الف) $n-۱$ ب) n ج) $۲n-۱$ د) $۲n$ ه) $۲n+۱$

۱۴- در شکل روبه‌رو، می‌خواهیم دایره‌ها را با ۳ رنگ آبی، قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که، رنگ هر دایره و دو دایره‌ی زیر آن، که به آن متصل‌اند (اگر وجود داشته باشد)، با هم برابر باشد و یا رنگ هر سه آن‌ها متفاوت باشد. به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد؟



الف)۳۴۲ ب)۸۲۷ ج)۹۲۷ د)۸۵۴۱ ه)۸۴۰۲

۱۵- عدد طبیعی a را در نظر بگیرید. در هر مرحله می‌توان یکی از ۲ عمل زیر را روی این عدد انجام داد:

دَوَران: رقم سمت چپ a به سمت راست این عدد منتقل می‌کنیم. برای مثال، این عمل عدد ۱۲۳۴ را به عدد ۲۳۴۱ تبدیل می‌کند. پس از هر بار انجام دادن این عمل، صفرهای سمت چپ عدد (در صورت وجود)، حذف می‌شود. برای مثال، دوران عدد ۱۰۲۳ عدد ۲۳۱ را نتیجه می‌دهد.

به علاوه ۲: ۲ واحد به a اضافه کنیم.

در چند تا از جفت‌های زیر می‌توان، با انجام دنباله‌ای از دو عمل فوق، سمت چپ را به عدد سمت راست تبدیل کرد؟

(۲۱۳۴،۲۱۴۳)

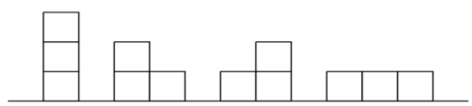
(۱۱۱۱،۱۱۱)

(۱۲۱۲۱،۲۱۲۱۲)

(۱۰۲،۴۵)

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۶- به چند روش می‌توان ۸ جعبه را در تعدادی ستون چسبیده به هم، روی زمین قرار داد؟ حالات مختلف برای ۳ جعبه را در شکل می‌بینید.



الف) ۱۲۷ ب) ۶۴ ج) ۴۰ د) ۹ ه) هیچ کدام

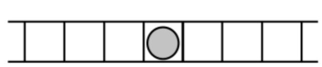
۱۷- پس از امتحانات پایان نیم سال، نمرات فیزیک و ریاضی هر یک از ۳۰ دانش‌آموز کلاس «دوم ب» معلوم شد. آقای هاشمی که معلم فیزیک بود، رتبه‌های ۱ تا ۳۰ را در درس فیزیک اعلام کرد. آقای کاظمی، معلم ریاضی آن‌ها نیز رتبه‌های ۱ تا ۳۰ را در درس ریاضی اعلام کرد. هیچ دو دانش آموزی، در یک درس نمره‌ی یک سان نگرفته بودند. فردای آن روز قرار شد رتبه‌بندی کل را با استفاده از میانگین (نصف مجموع) دو رتبه‌ای که در دروس ریاضی و فیزیک کسب شده، اعلام کنند. در این رتبه‌بندی، رتبه‌ی کل دانش‌آموز x، که میانگین دو رتبه‌اش در ریاضی و فیزیک S است برابر است با: تعداد دانش آموزانی که میانگین دو رتبه‌شان از S اکیداً کم‌تر است. به اضافه یک.

سروش در هر یک از دو درس رتبه‌ی ۹ آورده است (نهمین بالاترین نمره). بهترین و بدترین رتبه کلی که سروش ممکن است به دست بیاورد، کدام است؟

الف) بهترین ۱ و بدترین ۱۶ ب) بهترین ۱ و بدترین ۱۷ ج) بهترین ۱ و بدترین ۱۸

د) بهترین ۹ و بدترین ۱۷ ه) بهترین ۹ و بدترین ۱۸

۱۸- در یکی ردیف از خانه‌ها که از دو طرف نامتناهی است، تعدادی توپ قرار دارد. در هر حرکت، یک توپ را برمی‌داریم و دو توپ را از همان خانه، یکی را به طرف چپ و دیگری را به طرف راست، پرتاب می‌کنیم. هر توپ پرتاب شده از روی خانه‌های دارای توپ رد می‌شود تا به خانه‌ای خالی برسد و در همانجا متوقف می‌شود.

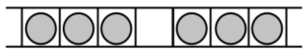


در ابتدا یک توپ داریم که می‌توانیم آن را هر جای ردیف خانه‌ها که بخواهیم قرار دهیم. بعد از قرار دادن توپ، می‌توانیم به تعداد دل‌خواهی حرکت بالا را انجام دهیم. اگر ردیف در ابتدا خالی باشد، به کدام یک از حالت‌های زیر می‌توان رسید؟

۱


۲


۳

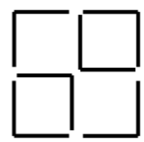

۴


الف) ۱و۲ ب) ۱و۴ ج) ۲و۳ د) ۳و۴ ه) ۱و۲و۳و۴

۱۹- یک جدول ۱۲×۱۰ داریم. مختصات خانه‌ی بالا سمت چپ (۰،۰)، و مختصات خانه‌ی پایین سمت راست (۹،۱۱) است. چند زیر جدول (زیر مستطیل از خانه‌ها)، شامل خانه‌ی (۷،۵) است؟ (بدیهی است که خانه‌ی (۷،۵) به تنهایی و کل جدول، هر کدام یک زیر جدول محسوب می‌شوند.)

الف) ۷۳۵ ب) ۱۱۲۰ ج) ۱۰۰۸ د) ۱۲۶۰ ه) ۱۲۰۰

۲۰- به چند طریق می‌توان یک جدول ۲×۲ را با شش شکلِ  ساخت؟ یکی از این روش‌ها در شکل روبه‌رو نشان داده شده است.

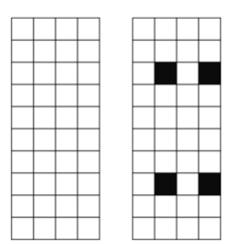


الف)۸ ب)۶ ج)۴ د)۵ ه)۷

۲۱- ۱۰ لامپ خاموش در یک ردیف، به ترتیب پشت سر هم قرار دارند. در هر مرحله، یکی از لامپ‌های خاموش را روشن می‌کنیم. این کار را آن‌قدر انجام می‌دهیم تا تمام لامپ‌ها روشن شوند. می‌خواهیم به ترتیبی لامپ‌ها را روشن کنیم که هیچ‌گاه بین لامپ‌های روشن لامپ خاموش قرار نداشته باشد. به عنوان مثال، اگر لامپ‌های اول و سوم روشن باشند، لامپ دوم نیز باید حتماً روشن باشد. به چند طریق می‌توان ترتیبی برای روشن کردن لامپ‌ها ارائه داد، به طوری که شرط مذکور حفظ شود؟

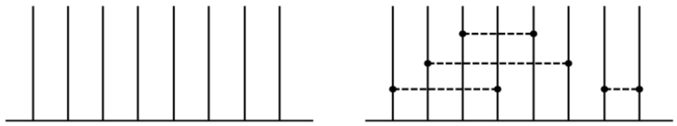
الف) ۱۲۰ ب) ۵۱۲ ج) ۱۰۲۴ د) ۵۰۴۰ ه) ۴۰۳۲۰

۲۲- یک جدول ۴×۱۰ خالی مانند شکل سمت چپ داریم. به خانه‌ی سیاه که ۴ گوشه‌ی یک مستطیل قرار بگیرند، «چهارخونه» می‌گوییم (مانند شکل سمت راست). حداکثر چند خانه از جدول خالی سمت چپ را می‌توانیم سیاه کنیم به طوری که، در آن هیچ «چهار خونه‌ای» مشاهده نشود؟



الف) ۱۰ ب) ۱۳ ج) ۱۶ د) ۱۸ ه) ۲۰

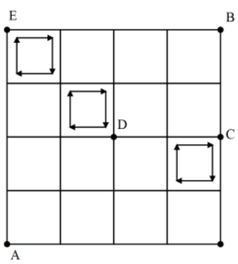
۲۳- ۸ میله‌ی مطابق شکل سمت چپ به ترتیب روی زمین چیده شده‌اند، به طوری که فاصله‌ی هر میله از میله‌ی بعدی‌اش، برابر ۱ واحد . یک «جفت بندی»، این ۸ میله را با ۴ خط چین افقی به ۴ جفت تقسیم می‌کند. در شکل سمت راست یکی از راه‌های جفت بندی نمایش داده شده است.



«طول» یک جفت بندی، برابر مجموع طول ۴ خط چین استفاده شده برای آن جفت‌بندی است. برای مثال طول جفت‌بندی شکل سمت راست برابر با ۱۰ می‌باشد. اکنون اگر همه‌ی جفت‌بندی‌های ممکن برای این ۸ نقطه را در نظر بگیریم، میانگین طول این جفت‌بندی‌ها چه قدر است؟

الف) ۸ ب) ۱۲ ج) ۷ د) ۱۶ ه) ۱۴

۲۴- پلیس در صدد دستگیر کردن یک مجرم فراری است. این مجرم تحت تعقیب در نقطه‌ی A در شکل روبه‌رو قرار دارد و می‌خواهد در ۸ دقیقه به نقطه‌ی B برود. او می‌تواند در هر دقیقه روی یک ضلع یک خانه‌ی جدول حرکت کند. در لحظه‌ای که مجرم در نقطه‌ی A قرار دارد، سه پلیس در نقاط C و D و E هستند، و هر کدام، در یک مسیر دوری که در شکل با چهار پیکان نشان داده شده حرکت می‌کنند. جهت حرکت نیز مشخص شده است. پلیس‌ها در هر دقیقه یک ضلع یک خانه‌ی جدول را طی می‌کنند. اگر مجرم و یکی از پلیس‌ها در یک نقطه‌ی تقاطع در جدول قرار بگیرند، پلیس مجرم را دستگیر می‌کند، ولی اگر روی یک ضاع یک خانه‌ی جدول از روبه‌روی هم بگذرند پلیس نمی‌تواند او را دستگیر کند. پلیس می‌خواهد بداند چند مسیر مختلف برای مجرم از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B وجود دارد که اگر مجرم آن مسیرها را انتخاب کند، پلیس نمی‌تواند او را دستگیر کند.

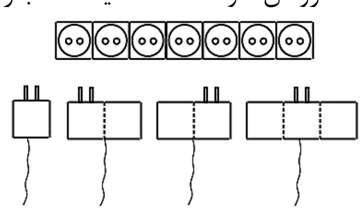


الف)۶۱ ب)۱۲ ج)۸۱ د)۴۲ ه)۳۰

۲۵- با بررسی اطلاعات فروش در یک فروشگاه می‌توان قاعده‌هایی برای پیش‌بینی خریدهای مشتریان پیدا کرد، مثل «{نان} $\Rightarrow$ {گردو، پنیر}» یا «{پاک کن، تراش} $\Rightarrow$ {مداد}». قاعده‌ی «$A \Rightarrow B$» یعنی مشتری با خرید مجموعه‌ی A، حتماً مجموعه‌ی B را نیز خریداری می‌کند. A و B مجموعه‌هایی ناتهی از اجناس فروشگاه هستند که اشتراک ندارند. اگر ۸ نوع جنس در فروشگاه داشته باشیم، در حالت کلی چند قاعده‌ی مختلف می‌توان تولید کرد؟

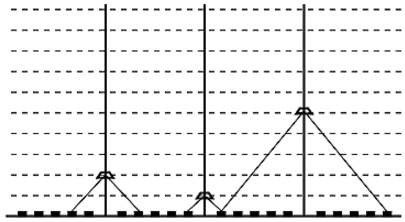
الف) ۶۰۵۰ ب) ۶۰۴۹ ج) ۶۳۰۵ د) ۶۳۰۶ ه) ۶۵۶۱

۲۶- ۷ پریز با ابعاد ۱×۱ در یک ردیف، مطابق شکل روی دیوار نصب شده‌اند. ۴ وسیله‌ی برقی در اختیار داریم که می‌خواهیم از آن‌ها به صورت هم زمان استفاده کنیم. دو شاخه‌های این وسیله‌ها مانند شکل با اندازه‌های ۳×۱، ۲×۱، ۲×۱، ۱×۱ هستند. به چند طریق می‌توان این دو شاخه‌ها را در پریزها قرار داد، به طوری که تمام وسیله‌ها روشن شوند؟ دقت کنید که مجاز به چرخاندن دو شاخه‌ها نیستم.



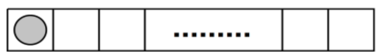
الف)۲۱ ب)۴۲ ج)۳۰ د)۲۴ ه)هیچکدام

۲۷- به چند طریق می‌توان ارتفاع سه نورافکنی که در شکل مقابل نشان داده شده است را تنظیم کرد، به طوری که تمام ۲۰ جعبه‌ی روی زمین، که با مستطیل سیاه نشان داده شده‌اند روشن شوند؟ ارتفاع هر کدام از نورافکن‌ها می‌تواند بین ۱ تا ۱۰ باشد. یک نورافکن در ارتفاع i، تا i جعبه در سمت راست خود و i جعبه در سمت چپ خود را روشن می‌کند.



الف) ۱۱۰ ب) ۳۲۵ ج) ۲۵۰ د) ۴۲۴ ه) ۴۶۰

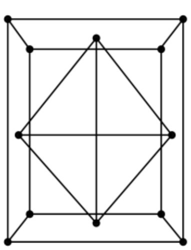
۲۸- یک نوار به طول n به صورت رو به‌رو و یک مهره موجود است.
دو نفر این بازی را روی نوار انجام می‌دهند: در ابتدا، مهره در سمت چپ‌ترین خانه‌ی نوار قرار دارد. هر بازی‌کن خود باید یکی از دو حرکت زیر را انجام دهد:

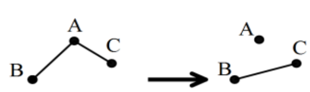


(الف) به شرط این که تا آخر نوار (سمت راست‌ترین خانه) حداقل i خانه‌ی خالی وجود داشته باشد، مهره را به i خانه جلوتر انتقال دهد. البته i حتماً باید یکی از اعداد ۱، ۲ یا ۵ باشد.
(ب) مهره را دست نزند و نوبت را به نفر بعدی واگذار کند.
اگر نفر قبلی در نوبت خود حرکت (ب) را انجام داده باشد، بازی کن فعلی حق ندارد حرکت (ب) را انجام دهد. به عبارت دیگر، هیچ گاه دو حرکت (ب) متوالی در بازی انجام نخواهد شد. برنده کسی است که در نوبت خود، مهره را به آخرین خانه‌ی نوار انتقال دهد.
برای چه تعداد از مقادیر n از میان اعداد {۱۰، ۳۴، ۵۱، ۶۷، ۸۱} نفر اول برنده است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۲۹- کامبیز شکل سمت چپ را روی کاغذ رسم کرده و به شاندیز داده است. این شکل از تعدادی «تکه خط» تشکیل شده است. تکه خط چیزی شبیه پاره خط است با این تفاوت که دو سر آن حتما دو دایره‌ی کوچک سیاه قرار دارد. شاندیز در هر مرحله می‌تواند سه دایره‌ی سیاه، A، B و C که A به B و A به C با تکه خط متصل هستند ولی B به C متصل نیست را انتخاب کند، سپس تکه خط‌های AB و AC را حذف کرده و تکه خط BC را به جای آن دو رسم کند (مانند شکل پایین). با تکرار این عمل تا جای ممکن، حداقل چه تعداد «تکه خط» ممکن است باقی بماند؟ (دقت کنید که در شکل سمت چپ هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط نیستند.)





الف) ۱ ب) ۷ ج) ۸ د) ۱۰ ه) ۱۴

۳۰- ۱۳۸۶ وزنه با وزن‌های متفاوت و یک ترازو در اختیار داریم. در هر مرحله می‌توانیم وزن دو وزنه را با ترازو مقایسه کنیم. با حداقل چند بار مقایسه می‌توانیم با اطمینان اولین و دومین وزنه را از لحاظ سبکی پیدا کنیم؟

الف) ۱۳۸۵ ب) ۲۷۷۲ ج) ۱۳۸۶ د) ۱۳۹۶ ه) ۲۷۶۹

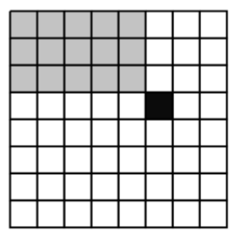
۳۱- یک جدول از اعداد متمایز داده شده است. در هر سطر، دو خانه که حاوی بزرگترین اعداد آن سطر هستند را علامت می‌زنیم. همین کار برای ستون‌ها انجام می‌دهیم. می‌خواهیم بدانیم در کل جدول، حداقل چنـد خانه علامت زده می‌شوند. اگر جدول ما ۱۰۰×۱۰۰ باشد، این «مقدار حداقل» چه قدر است؟ در مورد جدول ۱۰۱×۱۰۱ چه طور؟

الف) ۴۰۰ و ۴۰۴ ب) ۲۰۰ و ۲۰۴ ج) ۳۰۰ و ۳۰۳ د) ۲۰۰ و ۲۰۰ ه) ۲۰۰ و ۲۰۲

۳۲- اعداد ۱ تا ۱۰۰ روی محیط یک دایره، با ترتیبی تصادفی چیده شده‌اند. ما از محل هیچ عددی اطلاع نداریم. دستگاهی در اختیار داریم که با تعیین مکان ۵۰ عدد متوالی روی دایره، کوچک‌ترین آن‌ها را به ما اعـلام می‌کند. توجـه کنید که دستگاه محل کوچک‌ترین عدد را به ما نشان نمی‌دهد، بلکه فقط مقدار کوچک‌ترین عدد را اعلام می‌کنـد. با حداکثر چند بار استفاده از این دستگاه، می‌توان محل عدد ۱ را پیدا کرد؟

الف) ۷ ب) ۹ ج) ۲۵ د) ۴۹ ه) ۵۰

۳۳- یک جدول ۸×۸ را در نظر بگیرید. مهره‌ی «نهنگ»، مهره‌ای است که اگر در یک خانه از این جدول ۸×۸ قرار بگیرد، مطابق شکل تمامی خانه‌هایی که اکیداً بالاتر و سمت چپ‌تر از خانه‌ی خودش هستند، را تهدید می‌کند. به چند طریق می‌توان یک مهره‌ی نهنگ سیاره و یک مهره‌ی نهنگ سفید را در این جدول قرار داد، به طوری که هیچ یک دیگری را تهدید نکن؟ (دقت کنید که نمی‌توان دو مهره نهنگ را در یک خانه قرار داد)



الف)۱۲۶۴ ب)۷۸۴ ج)۱۵۶۸ د)۷۶۸ ه)۵۱۲

۳۴- می‌خواهیم کیکی درست کنیم که به ژله‌ی توت فرنگی، خامه‌ی شکلاتی، و ۲ ماده‌ی آرد، و شکر نیاز دارد. ژله‌ی توت فرنگی به ۳ ماده‌ی پودر ژله، توت فرنـگی، و آب مقطـر نیـاز دارد. خامه‌ی شکلاتـی نیز به ۲ ماده‌ی خامه و شکلات نیاز دارد. یخچالی داریم که مواد درون آن همواره از ایین به بالا، هر کدام روی قبلی، قرار می‌گیرند. در هر ساعت می‌توانیم یکی از مواد فوق را که خود به ماده دیگری نیاز ندارد، خریداری کنیم و در یخچال روی بقیه مواد قرار دهیم، یا تعدادی از مواد را از بالای یخچال (از روی بقیه‌ی مواد) برداریم و با استفاده از همه‌ی آن‌ها ماده‌ی جدیدی بسازیم و آن را در یخچال روی بقیه‌ی مواد قرار دهیم.

برای مثال اگر مواد درون یخچال به ترتیب از پایین به بالا آب مقطر، توت فرنگی، پودر ژله، خامه و شکلات باشد، می‌توانیم خامه و شکلات را برداریم و با استفاده از آن‌ها خامه‌ی شکلاتی درست کنیم، در حالی که نمی‌توانیم آب مقطر، توت فرنگی و پودر ژله را برداریم و ژله‌ی میوه‌ای درست کنیم چون این مواد بالای یخچال قرار ندارند.

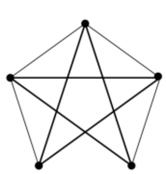
اگر در ابتدا یخچال خالی باشد، به چند طریق می‌توان با استفاده از این یخچال کیک را درست کرد؟

الف) ۲۸۸ ب) ۳۲۰ ج) ۴۲۰ د) ۵۱۲ ه)۴۸۰

۳۵- در شکل روبه‌رو، ۵ عدد میخ مشاهده می‌کنید که با تعدادی کش به هم متصل شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۵ تا از کش‌ها را انتخاب کرد، به طوری که هر میخ، دقیقاً به دو کش انتخاب شده وصل باشد؟

الف)۲۱ ب)۶ ج)۴۲

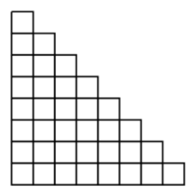
د)۸ ه)۸۱



۳۶- دو عدد a و b را در مبنای ۲ در نظر بگیرید. عدد a را یکی یکی زیاد می‌کنیم. در هر بار زیاد کردن اگر رقم i ام عدد a در نمایش مبنای دوی آن تغییر کرد، ۲^{i} تا به عدد b اضافه می‌کنیم (رقم سمت راست، رقم شماره‌ی ۰ محسوب می‌شود). در ابتدا دو عدد a و b صفر هستند. پس از تعدادی بار زیاد کردن عدد a، عدد b برابر ۹۶ شده است. عدد a را چند بار زیاد کرده‌ایم؟

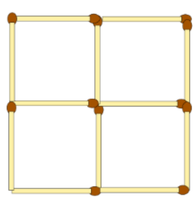
الف) ۱۵ ب) ۱۸ ج) ۲۲ د) ۳۶ ه) ۴۸

۳۷- مهره‌ی «رخ» در شطرنج، مهره‌ای است که تمامی خانه‌هایی که هم سطر، یا هم ستون با خودش باشند را تهدید می‌کند.
جدول پلکانی ذوبه‌رو را در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان ۷ مهره‌ی «رخ» را دراین جدول گذاشت، به طوری که هیچ دو مهره‌ای هم دیگر را تهدید نکنند؟



الف)۹۸۴ ب)۲۵۵ ج)۶۴۰ د)۲۸۲ ه)۳۵

۳۸- شکل زیر از ۱۲ چوب کبریت تشکیل شده است. به چند طریق می‌توان ۸ تا از این چوب کبریت‌ها را برداشت، به طوری که هیچ دو چوب کبریتی از چهارتای باقی مانده به هم وصل نباشند (در هیچ نقطه‌ای اشتراک نداشته باشند)؟



الف)۴۱ ب)۷۱ ج)۶
د)۸۱ ه)۵

۳۹- یک عدد با تعداد دلخواهی عدد ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. می‌توان تعدادی از ارقام این عدد را از سمت چپ به سمت راست منتقل کرد (مثلاً ۱۱۲۲۲ $\Leftarrow$ ۲۲۱۱۲). با تکرار این عمل تعدادی عدد به دست می‌آیند. اگر عدد اولیه از همه آن‌ها کوچکتر بود آن را عددی خوب می‌نامیم. چند عدد خوب ۵ رقمی وجود دارند؟

الف) ۳۲ ب) ۱۰ ج) ۸ د) ۶ ه) ۲۰

۴۰- ۴ زوج وارد رستورانی می‌شوند. درون رستوران یک میز مربعی وجود دارد که پشت هر ضلع آن ۲ صندلی وجود دارد. این ۴ زوج به چند طریق می‌توانند دور این میز بنشبنند به طوری که، هر نفر کنار زوج خود باشد (یعنی با او در یک ضلع بنشیند) یا دقیقاً روبه‌روی او باشد؟
(دقت کنید که میز قابل چرخاندن نیست و هر دو نفری با هم متفاوت هستند.)

الف) ۱۴۴ ب) ۵۷۶ ج) ۶۶۸ د) ۱۱۷۲ ه) ۱۵۳۶

«پاسخنامه تشریحی»

۱- **گزینه‌ی (ب) درست است.**

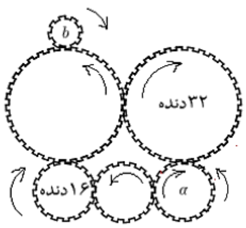
برای محاسبه‌ی حاصل جمع خواسته شده تعداد دفعـاتی که هر عـدد در جمع بکار رفته را محاسبه می‌کنیم. این تعداد برابر است با تعداد زیر مستطیل‌هایی که آن عدد را شامل می‌شود.

به علت تقارن موجود، تعداد زیر مستطیل‌هایی که ۵ را شامل می‌شوند با تعداد زیر مستطیل‌های دارای ۵-برابرند. پس این دو خانه روی هم تاثیری در حاصل جمع نهایی ندارند. برای ۲ و ۲- هم همین شرایط برقرار است. تعداد زیر مستطیل‌های شامل خانه‌ی ۱ برابر است با :

۸= ۴ × ۲ (۲ انتخاب برای ضلع پایین مستطیل و ۴ انتخاب برای ضلع راست آن وجود دارد.)

پس حاصل جمع مورد نظر برابر ۸ است.

۲- **گزینه‌ی (ه) درست است.**



اگر چرخ دنده‌ای را به اندازه‌ای x دنده در جهـتی (ساعتگرد یا پاد ساعتگرد) بچرخانیـم، چرخ دنده‌ی مجاور آن به اندازه x دنده در خلاف آن جهت می‌چرخد.

مطابق شکل، چرخ دنده a هم باید x دنده ساعتگرد بچرخد هم x دنده پاد ساعتگرد. پس هرگز نمی‌چرخد.

۳- **گزینه‌ی (د) درست است.**

از شهر ۴ به ۵ تن‌ها یک مسیر وجود دارد که همان جاده‌ی یک طرفه از ۴ به ۵ است. برای هرشهر ۳ ≤i≤ ۱ باید بین i و دقیقاً یکــی از شهرها با شماره‌ی بزرگتر جاده رسم کرد. یعنی به i–۵ طریق می‌توان جاده رسم کرد که دقیقن یک مسیر از i به ۵ وجود داشته باشد. پس تعداد کل حالت‌ها ۲۴= ۴ × ۳ × ۲ × ۱ است.

۴- **گزینه‌ی (ج) درست است.**

با توجه به شرط ۱، از هر شهر دقیقن یک جاده‌ی یک طرفه خارج می‌شود. پس مجموع جاده‌های ورودی و خروجـی شهر ۱ دقیقاً ۱ است.

مجموع جاده‌های ورودی و خروجی شهر ۲ حداکثر ۲، شهر ۳ حداکثر ۳ و شهر ۴ حداکثر ۴ است.

پس تن‌ها در صورتی مجموع تعداد جاده‌های ورودی و خروجی شهر ۴ بیشتر از ۳ می‌شود که از شهرهای ۱ و ۲ و ۳ جاده‌هایی به سمت ۴ وجود داشته باشد و از ۴ یک جاده به ۵ و تن‌ها در حالتی مجموع جاده‌های ورودی و خروجی شهر ۵ بیشتر از ۳ می‌شود که هر ۴ شهر با یک جاده‌ی یک طرفه مستقیمن به آن متصل باشند.

پس این ۲ حالت را از ۲۴ حالت جواب مسأله‌ی قبل کم می‌کنیم و جواب ۲۲ می‌شود.

۵- **گزینه‌ی (ج) درست است.**

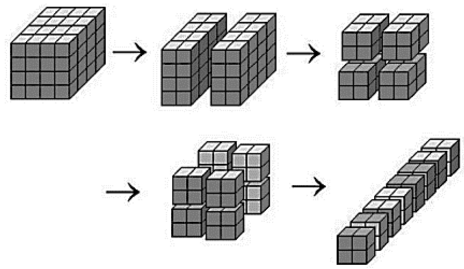
اگر هیچ‌کدام از ۴ حرکت اول را انتخاب نکنیم (۴جهت اصلی) روبات همیشه روی مبـدا مختصـات باقی می‌ماند و اگر فقط یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم همیشه روی محورها حرکت خواهد کرد. کم‌ترین قیمت خریدن ۲ تا از ۴ جهت اصلی، ۴۰۰۰۰ تومان یعنی حرکت به چپ و پایین است.

با این ۲ حرکت روبات فقط می‌تواند ناحیه‌ی سوم را طی کند. از بین تقارن‌ها کمترین قیمت برابر ۱۰۰۰۰ تومان است که مربوط به تقارن نسبت به $y = -x$ است.

حالا با حرکت به چپ و پایین به هر مختصـاتی که برسـد به قرینه‌ی آن نسبت به $y = -x$ نیز می‌رسد و می‌تواند از آنجا خود را دوباره به مبدا مختصات برساند. به این ترتیب همه‌ی مختصات را می‌توانـد طی کنـد. چون همه‌ی انتخاب حرکت‌ها کمینه بود کمترین قیمت روبات ۵۰۰۰۰ تومان می‌شود.

۶- **گزینه‌ی (ب) درست است.**

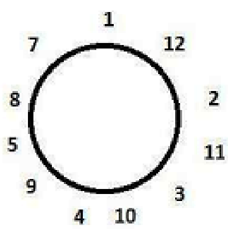
در این شکل مکعبی ۱ × ۱ وجود دارد که هیچ‌کدام از ۶ وجه آن دیده نمی‌شود. یعنی از هر ۶ وجه، به مکعب ۱ × ۱ دیگری اتصال دارد. برای جدا کردن چنین مکعبی به ۶ عمل برش نیاز است. پس دست کم ۶ برش لازم داریم. به ترتیب مقابل با ۶ برش به خواسته‌ی مسأله می‌رسیم:



مشخص است که با دو برش نهایی می‌توان کار را تمام کرد.

۷- **گزینه‌ی (ب) درست است.**

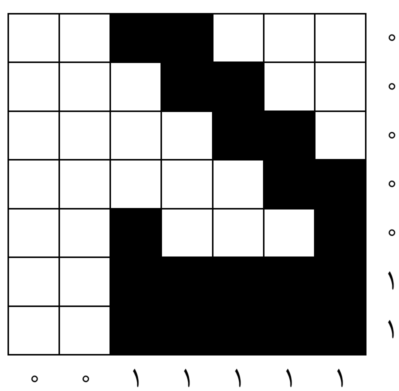
به ازای هر عدد مانند a حداکثر ۲ نفر a تا شیرینی برمی‌دارند (خود شخص با شماره a و شخص سمت چپش). پس دست کم ۶ شماره وجود دارد که به تعداد آن‌ها شیرینی برداشته می‌شود.



در حالت نشستن مشخص شده، به ازای اعداد ۷ تا ۱۲ هر بار ۲ بار شیرینی برداشته می‌شود که با توجه به شرایط بالا حداکثر تعداد است: ۱۴ =(۱۲+ ... + ۸ + ۷) × ۲

۸- **گزینه‌ی (ج) درست است.**

در ۵ ستونی که به آنها ۱ نسبت داده شده، در هر ستون دست کم ۴ تا ۱ و در مجموع حداقل ۲۰ تا ۱ باید وجود داشته باشد. از طرفی برای ۵ سطری که به آن‌ها ۰ نسبت داده شده باید در مجموع دست کم ۲۰ تا ۰ وجود داشته باشد یعنی حداکثر ۲۹=۲۰-۴۹ تا ۱ در جدول داریم.



(با چرخاندن جدول و تبدیل ۱ها به ۰ و برعکس به حالت حداکثر می‌رسیم)

۹- **گزینه‌ی (ج) درست است.**

تعداد تغییرات رقم یکان، دهگان و صدگان را بررسی کرده و سپس مجموع آنها را محاسبه می‌کنیم:

- یکان: ۶۹۳= ۲۳۳ - ۹۲۶
- دهگان: ۶۹ = ۲۳ - ۹۲
- صدگان: ۶۹۳ = ۲- ۹

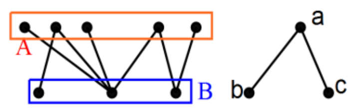
در نتیجه مجموع تغییرات برابر است با : ۷۶۹= ۷ + ۶۹ + ۶۹۳

۱۰- گزینه‌ی (ج) درست است.

شکل سوال به صورت روبرو قابل ترسیم است:

هیچ‌کدام از نقطه‌های بخش A نمی‌توانند با هیچ‌یک از نقطه‌هـای بخش B همرنگ باشند. (چرا؟)

دو نقطه‌ی b و c را در بخش A و نقطه‌ی a را در بخش B می‌گذاریم. پس حداکثر اختلاف تعداد بخش (رنگ)ها ۳= ۴ − ۷ می‌شود.



۱۱- گزینه‌ی (ه) درست است.

چون نفر دهم کلاس ۱۵ گرفته دست کم ۱۰ نفر نمـره‌ی بالای ۱۰ دارنـد. نشـان می‌دهیـم ۲۰ نفر دیگر، همـه می‌توانند نمـره‌ی زیر ۱۰ گرفته باشند.

مجموع نمرات دانش آموزان ۳۶۰= ۳۰ × ۱۲ است و دست کم یک نفر نمره‌ی ۲۰، یک نفر ۵ و یک نفر ۱۵ گرفته است: ۴۰= ۲۰ + ۵ + ۱۵

فرض می‌کنیم ۱۹ نفر نمره‌ی ۹ گرفته باشند: ۱۷۱= ۹ × ۱۹

پس باید ۸ نفر دیگر با نمره‌ی بالای ۱۵ داشته باشیم که در مجموع ۱۴۹= (۱۷۱+۴۰) − ۳۶۰ نمره آورده باشند. حالتی که در آن ۵ نفر ۱۹ و ۳ نفر ۱۸ گرفته باشند این شرط را نیز تامین می‌کند.

۱۲- گزینه‌ی (الف) درست است.

دایره‌ها به گونه‌ای تقسیم شده‌اند که یکی از کمان‌های کامل آنها مسیری با ۴ پاره‌خـط دارد و کمان دیگر ۳ تا. از هر دایره مسیر ۳ خطی را انتخاب می‌کنیم. پس در کل ۱۱ جاده را می‌پیماییم. از ۷ تا از نقاط تقاطع دایره‌ها ۲ جاده برای انتخاب وجود دارد و از ۴تای آنها ۳ جاده، پس طبق اصل ضرب تعداد روش‌های رسیدن از A به B با کمترین تعداد جاده $۲^۷ \times ۳^۴$ می‌شود.

۱۳- گزینه‌ی (ج) درست است.

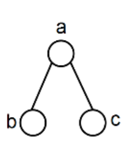
اگر با فشردن یک کلید عدد نمایشگر زیاد شـد، یعنـی لامپ آن خامـوش بوده و حالا روشـن است و نیـازی به فشـردن دوباره‌ی آن کلید نیست و اگر عدد کم شد باید یک بار دیگر آن را فشار دهیم. بنابراین اگر x چراغ خاموش داشته باشیم، به ازای هرکدام یک بار باید کلیدی را فشار دهیم. همچنین $۲(n - x)$ بار باید کلید لامپ‌های را فشار دهیم. تعداد کل حرکات $۲(n - x) + x = ۲n - x$ بار است.

اگر $x = ۰$ باشد همه‌ی لامپ‌ها روشن هستند و نیازی به هیچ تغییر وضعیتی نیست. پس حداکثر تعداد مرحله‌ها، به ازای $x = ۱$ بدست می‌آید و ۲n-۱ است.

۱۴- گزینه‌ی (ج) درست است.

به دایره‌هایی که هیچ دایره‌ای زیر آن‌ها نیست "میوه" می‌گوییم.

با تعیین وضعیت میوه‌ها، رنگ بقیه‌ی دایره‌ها منحصر به فرد تعیین می‌شود. (چرا؟)



شکل مقابل را در نظر بگیرید. برای b و c، ۳ رنگ وجود دارد. در صورتی که رنگ آن‌ها یکی شود، a هم باید با آن‌ها همرنگ باشد و در غیر اینصورت باید به رنگ سوم درآید.

در شکل ۶ میوه داریم پس طبق اصل ضرب به $۳^۶$ حالت می‌توان شکل را رنگ کرد.

۱۵- گزینه‌ی (ه) درست است.

۲۱۴۳→دوران → ۳۲۱۴→۵۴۰ بار "به علاوه ۲" → ۲۱۳۴
۱۱۱→ دوران → ۱۰۰۱۱→۴۴۵۰ بار "به علاوه ۲" → ۱۱۱۱
۲۱۲۱۲→۴۵۵۰ بار "به علاوه ۲" → ۱۲۱۱۲→دوران → ۲۱۲۱۱ → دوران → ۱۲۱۲۱
۴۵→ ۷ بار "به علاوه ۲"→ ۳۲→ دوران → ۱۰۳

۱۶- گزینه‌ی (الف)درست است.

برای k جعبه، با استقرا روی k ثابت می‌کنیم با $۲^{k-۱}$روش می‌توان آن‌ها را روی زمین قرار داد.

پایه‌ی استقرا برای ۱ جعبه برقرار است.

فرض کنیم حکم برای k جعبه صحیح باشد. برای $k+۱$ جعبه، حالت‌های مختلف با k جعبه را می‌سازیم. برای هرکدام از این حالت‌ها، جعبه‌ی $k+۱$ ام را می‌توان سمت راست همه، روی زمین گذاشت و یک ستون جدید ساخت یا روی سمت راست‌ترین ستون آن قرار داد. بدین ترتیب حالت تکراری نخواهیم داشت و تمامی حالات قابل ساخت هستند. (چرا؟)

پس به ازای هر روش چیدن k جعبه، ۲ روش برای چیدن $k+۱$ جعبه به دست آوریم. و تعداد روش‌ها $۲^k = ۲\times۲^{k-۱}$ است. در نتیجه جواب مساله برای $k=۸$ ، ۱۲۸ می‌شود.

۱۷- گزینه‌ی (الف) درست است.

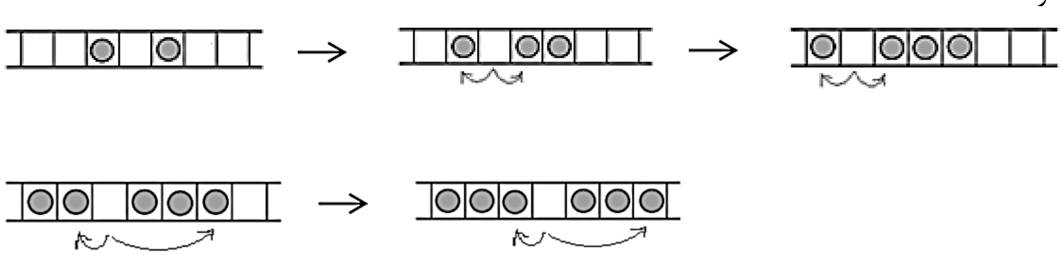
در این صورت میانگین رتبه‌ی همه‌ی دانش آموزان از ۹ بیشتر می‌شود و سروش اول می‌شود:

ریاضی	۱	۲	۳	....	۸	۳۰	۲۹	....	۲۲	....	۱۰
فیزیک	۳۰	۲۹	۲۸	....	۲۳	۱	۲	....	۲۲	....	۱۰

مجموع رتبه‌های سروش ۱۸ است. پس کسانی که رتبه‌ی آن‌ها از او بهتر می‌شود باید مجموع رتبه‌هایشان حداکثر ۱۷ باشد. یعنی همه‌ی آن‌ها باید از بین کسانی باشند که در ریاضی و فیزیک رتبه‌ی کمتر یا مساوی ۱۶ آورده باشند. یکی از این افراد هم سروش است. یعنی از بین آن‌ها ۱۵ نفر هستند که می‌توانند رتبه‌ی بهتر از سروش بیاورند. پس رتبه‌ی سروش حداکثر ۱۶ است.

۱۸- گزینه‌ی (ب) درست است.

شکل ۱ و ۴:



اگر در هر مرحله مجموعه‌ی خانه‌های دارای مهره را در نظر بگیریم بازه‌ای را تشکیل می‌دهند که یک خانه‌ی خالی در بین آنها است. با استقرا این ادعا را اثبات می‌کنیم:

پایه‌ی استقرا: پس از حرکت اول دو خانه داریم که از یکدیگر یک خانه فاصله دارند.

گام استقرا: هر خانه‌ای که در این مرحله انتخاب شود ابتدا دو خانه را اضافه می‌کند که با این کار بازه‌ای با طول بزرگتر تشکیل می‌شود که خانه‌ی خالی ندارد (دریکی از جهت‌ها خانه‌ی خالی پر می‌شود). سپس مهره‌ی خانه‌ی انتخاب شده حذف می‌گردد که چون این خانه در دو سر بازه‌ی جدید نیست همواره بازه‌ای با یک خانه‌ی خالی باقی می‌ماند.

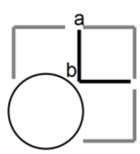
با این نتیجه می‌توان دریافت که هیچ‌گاه به شکل‌های ۲ و ۳ نمی‌توان رسید.

۱۹- گزینه‌ی (ج) درست است.

برای اینکه یک زیر مستطیل شامل خانه‌ی (۷,۵) باشد هر ضلع آن در بازه‌ی مورد پذیرش خود انتخاب شود

در نتیجه برای ضلع سمت راست زیر مستطیل ۷ حالت، ضلع چپ ۶ حالت، ضلع بالا ۸ حالت و ضلع پایین ۳ حالت داریم. پس طبق اصل ضرب $۱۰۰۸ = ۳ \times ۸ \times ۶ \times ۷$ زیر مستطیل شامل خانه‌ی (۷,۵) وجود دارد.

۲۰- گزینه‌ی (الف) درست است.



ضلع ab به چهار حالت مختلف می‌تواند توسط شکلی که در مساله بیان شده پر شود. شکل زیر یکی از این حالات را نمایش می‌دهد که خط‌های طوسی نشان دهنده‌ی حالت‌هایی است که منحصر به فرد تعیین می‌شود و دایره‌ها نیز می‌توانند به ۲ حالت مختلف پر شوند.

۳ حالت دیگر نیز به همین ترتیب هرکدام به ۲ طریق می‌توانند جدول را پر کنند. در نتیجه تعداد حالات کل برابر است با: $۸ = ۴ \times ۲$

۲۱- گزینه‌ی (ب) درست است.

با استقرا روی n ثابت می‌کنیم که به $۲^{n-۱}$ حالت می‌توان n لامپ را روشن کرد.لامپ‌ها را از چپ به راست از ۱تا n شماره‌گذاری می‌کنیم.

پایه‌ی استقرا: برای n=۱ برقرار است: تن‌ها لامپ را روشن می‌کنیم.

گام استقرا: فرض کنیم برای n-۱ لامپ، $۲^{n-۱}$ طریق وجود داشته باشد. برای n لامپ، لامپ شماره‌ی n را در نظر نمی‌گیریم. به ازای هر روش در n-۱ ، ۲ حالت متناظر در n ارائه می‌دهیم. در هر روش، هرگاه لامپ n-۱ ام روشن شد، ۲ انتخاب داریم: یا اول لامپ n را روشن می‌کنیم بعد دنباله حرکت‌های n-۱ لامپ را ادامه می‌دهیم یا دنباله را ادامه داده و در نهایت به عنوان آخرین لامپ، لامپ n ام را روشن می‌کنیم.

در صورتی که هیچ لامپی با شماره‌ی کمتر از n-۱ خاموش نباشد، تن‌ها یک انتخاب داریم (روشن کردن لامپn ام) که متناظر با این دنباله حرکت است: $(۱,۲,۳,.......,n-۱,n)$. این دنباله را هم متناظر با دنباله‌ی جدید $(n,n-۱,n-۱,.......,۲,۱)$ در نظر می‌گیریم.

پس به ازای هر دنباله برای n-۱ لامپ، ۲ دنباله برای n لامپ معرفی کردیم. بنابراین با $۲^{n-۱}$ روش می‌توانیم n لامپ را روشن کنیم و جواب مساله ۵۱۲ می‌شود.

۲۲- گزینه‌ی (ج) درست است.

تعداد روش‌های جفت کردن خانه‌های یک سطر و ساختن <u>جفت ستون</u> $\binom{۴}{۲} = ۶$ است. اگر جفت ستون‌های دو سطر برابر باشند، یک چهارخونه تولید می‌شود. هر سطر حداقل یک خانه‌ی مشکی دارد (۱۰ خانه). هر خانه‌ی مشکی که به یک سطر اضافه کنیم، حداقل یک جفت ستون می‌سازد. پس حداکثر می‌توانیم ۶ خانه‌ی مشکی دیگر به جدول اضافه کنیم تا هیچ جفت تکراری و در نتیجه هیچ چهارخونه‌ای ساخته نشود(اگر در سطری ۳ خانه سیاه شود، ۳ جفت ستون ساخته می‌شود و تعداد خانه‌های سیاه را کم می‌کند). یعنی حداکثر ۱۶ خانه‌ی جدول سیاه می‌شود.

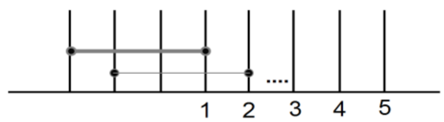
۲۳- گزینه‌ی (ب) درست است.

تعداد همه‌ی جفت‌بندی‌ها برابر است با : $\frac{\binom{۸}{۲}\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۴!}=۱۰۵$

تعداد دفعاتی که هر طولِ مجاز برای خط‌چین‌ها، در کل جفت‌بندی‌ها تکرار شده‌اند را محاسبه می‌کنیم.

به ازای مشخص شدن طولِ یک پاره خطِ جفت‌کننده، $\frac{\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۳!}=۱۵$ حالت برای کامل کردن جفت‌بندی وجود دارد.

می‌توان خط‌چین به طول ۱ را به ۷ حالت، به طول ۲ را به ۶ حالت و ... به طول ۷ را به ۱ حالت رسم کرد (شکل روبرو)



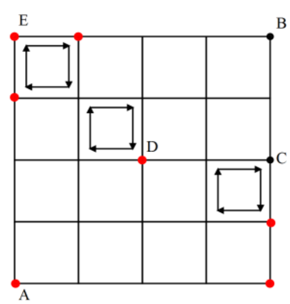
پس مجموع طول جفت‌بندی‌ها ۱۲۶۰ می‌شود که از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

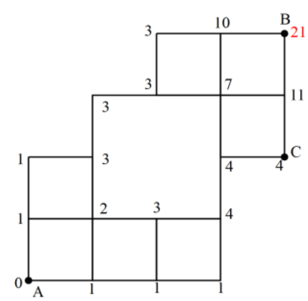
$$(۷\times۱+۶\times۲+۵\times۳+۴\times۴+۳\times۵+۲\times۶+۱\times۷)\times\frac{\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۳!}=۸۴\times۱۵$$

و میانگین آن برابر است با : $\frac{۱۲۶۰}{۱۰۵}=۱۲$

۲۴- گزینه‌ی (ب) درست است.

دزد فقط مجاز به حرکت به سمت راست و بالا است. هرکدام از راس‌های مسیرِ پلیس‌ها که با تعداد دقایق حرکت دزد تا آن راس به پیمانه‌ی ۴ همنهشت باشند، از جدول حذف می‌کنیم. به این ترتیب به جدول روبه رو می‌رسیم و تعداد روش‌های رسیدن به نقطه B در این شکل را با اصل جمع محاسبه می‌کنیم.





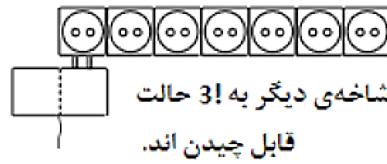
۲۵- گزینه‌ی (الف) درست است.

برای هرکدام از اجناس فروشگاه ۳ حالت در نظر می‌گیریم: در مجموعه‌ی A یا در مجموعه‌ی B یا خارج از قاعده‌ی پیش‌بینی. هیچ‌کدام از دو مجموعه‌ی A و B هم نباید خالی باشند. پس طبق اصل شمول و عدم شمول داریم: $۳^۸-۲^۸-۲^۸+۱=۶۰۵۰$

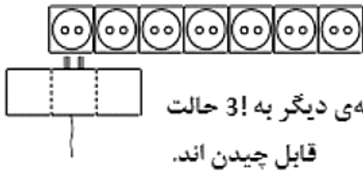
۲۶- گزینه‌ی (د) درست است.

ابعاد مجموعه‌ی پریزها ۷ × ۱ و ابعاد دوشاخه‌ها ۸ × ۱ است. پس باید بخشی از یک دوشاخه بیرون بماند. حالت‌های زیر پیش می‌آید:

- فقط یک قسمت از یک دوشاخه بیرون بماند:

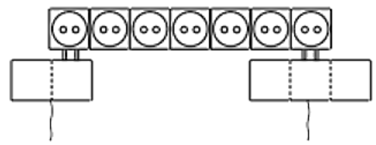


۳ دوشاخه‌ی دیگر به !3 حالت قابل چیدن اند.

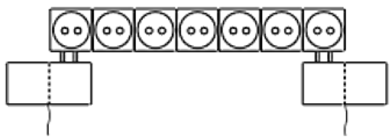


۳ دوشاخه‌ی دیگر به !3 حالت قابل چیدن اند.

- از دو طرف پریزها ۲ قسمت از ۲ شاخه بیرون بزنند:



برای دوشاخه های دیگر 2*3 حالت وجود دارد.



برای دوشاخه های دیگر 2*3 حالت وجود دارد.

با درنظر گرفتن حالت‌های متقارن (در مجموع ۷ حالت) جواب مساله ۴۲ = ۷ × ۶ می‌شود.

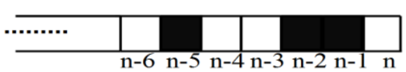
۲۷- گزینه‌ی (د) درست است.

- ارتفاع نورافکن وسط ۱۰ باشد: در اینصورت، این نورافکن همه‌ی جعبه‌ها را پوشش می‌دهد و ۲ نورافکن دیگر به ۱۰۰= ۱۰ × ۱۰ روش می‌توانند قرار گیرند.
- ارتفاع آن کمتر از ۱۰ باشد: جعبه‌های اول و آخر (۱ و ۲۰) در تاریکی می‌مانند پس ۲ نورافکن کناری باید ارتفاع حداقل ۵ داشته باشند که در اینصورت تمام جعبه‌ها روشن می‌شوند. پس برای هر ارتفاع نورافکن وسط بین ۱ تا ۹، نورافکن‌های کناری ۳۶= ۶ × ۶ حالت دارند.

پس در مجموع ۴۲۴= ۳۶ × ۹ + ۱۰۰ روش وجود دارد.

۲۸- گزینه‌ی (ه) درست است.

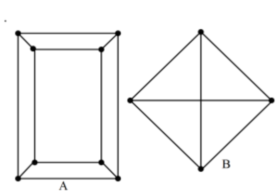
ادعا می‌کنیم برای هر n، نفر اول برنده‌ی بازی است.



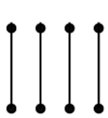
۶ خانه‌ی پایانی (سمت راست) نوار را (در صورت وجود) در نظر می‌گیریم. در صورتی که مهره در هرکدام از خانه‌های سیاه قرار گرفت، نفر اول حرکت می‌کند و مهره را به خانه‌ی n ام می‌برد. در غیر اینصورت نوبت را به نفر دوم واگذار می‌کند. چون نمی‌توانیم دو بار عمل واگذاری داشته باشیم نفر دوم مجبور به حرکت است و بالاخره مهره را در یکی از خانه‌های سیاه قرار می‌دهد و نفر اول برنده می‌شود.

۲۹- گزینه‌ی (د) درست است.

شکل سوال را به صورت روبه رو رسم می‌کنیم:



در شکل B شرایط لازم برای اجرای "عمل" وجود ندارد. پس هر ۶ تکه خط آن باقی می‌ماند. تعداد تکه خط‌های متصل به هر نقطه را درجه‌ی آن نقطه می‌نامیم. این "عمل" ، زوجیت درجه‌ی نقطه‌ها را تغییر نمی‌دهد.



درجه‌ی همه‌ی ۸ نقطه در شکل A فرد (۳) است. پس در پایان هم درجه‌ی آن‌ها فرد یعنی دست کم ۱ خواهد بود. بنابراین از این شکل هم دست کم ۴ خط باقی خواهد ماند.

۳۰- **گزینه‌ی (د) درست است.**

در هر مقایسه بین ۲ عدد، عدد بزرگتر قطعن کوچک‌ترین عدد نیست. پس می‌توان در هر بار مقایسه یکی از اعداد را حذف کرد.

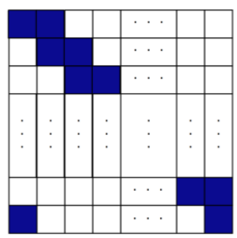
در هر مرحله اعداد را دو به دو با هم مقایسه می‌کنیم و نصف اعداد حذف می‌شوند. پس در $\lceil \log_{۲} ۱۳۸۶ \rceil = ۱۱$ مرحله به کوچکترین عدد می‌رسیم. با این روش، ۱۳۸۵ مقایسه انجام داده‌ایم (با استقرا ثابت کنید برای پیدا کردن کوچکترین عدد در بین n عدد n-1 مقایسه لازم و کافی است).

در اینصورت دومین کوچک‌ترین عدد، در مقایسه با کوچک‌ترین عدد حذف شده است. کوچک‌ترین عدد، با ۱۱ عدد در ۱۱ مرحله مقایسه شده است. کوچک‌ترین عدد از بین این ۱۱ عدد را با ۱۰ مقایسه پیدا می‌کنیم. در هر روش از مقایسه‌ها حداقل ۱۱ وزنه با کوچک‌ترین وزنه مقایسه می‌شوند. (چرا؟)

پس در مجموع با ۱۳۹۵= ۱۰ + ۱۳۸۵ مقایسه به دو عدد کوچک‌تر می‌رسیم. این عدد در گزینه‌ها وجود ندارد ولی نزدیک‌ترین گزینه به آن (د) یعنی ۱۳۹۶ است.

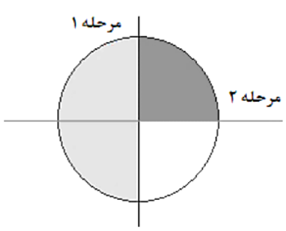
۳۱- **گزینه‌ی (ه) درست است.**

2n تا از بزرگترین اعدادی که قرار است در جـدول قرار داده شـود را در خانه‌هـــای علامت‌دار جدول روبرو می‌گذاریم. از طرفی چون از هر سطر باید ۲ خانه شامل بزرگترین اعداد را علامـــت بزنیم، حتمن دســت کم 2n خانه علامــت زده می‌شـود. پس 2n خانه لازم و کافــی اســت.



۳۲- **گزینه‌ی (الف) درست است.**

با استفاده از الگوریتم جست و جوی دودویی پیش می‌رویم. ابتـدا مکان ۱ تا ۵۰ را مورد سوال قرار می‌دهیم. در صورتی که عدد ۱ در بین این ۵۰ مکان بود، کار را با این نیمه ادامه می‌دهیم و در غیر اینصورت سراغ نیمه‌ی دیگر می‌رویم.



با این کار از نامطلوب بودن نیمی از مکان‌های دور دایره مطمئن می‌شویم. در ادامه هر سوالی که بپرسیم آن خانه‌ها تاثیری در جواب دستگاه ندارند. پس می‌توان از وجودشان صرف‌نظر کرد (نیمه‌ی سیاه).

در هر مرحله نیمی از خانه‌های سفید (و به تعداد مورد نیاز خانه‌ی سیاه) را می‌پرسیم و با اطمینان نیمی از سفیدها را کنار می‌گذاریم. با طی ۷ مرحله‌ی زیر به عدد ۱ می‌رسیم: (هر عدد، تعداد خانه‌های باقی‌مانده که یکی از آن‌ها مکان عدد ۱ است را نشان می‌دهد.)

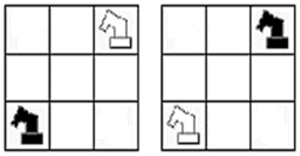
$۵۰ \longrightarrow ۲۵ \longrightarrow ۱۳ \longrightarrow ۷ \longrightarrow ۴ \longrightarrow ۲ \longrightarrow ۱$

۳۳- **پاسخ در گزینه‌ها نیست.**

وضعیت قرار گیری دو نهنگ نسبت به هم را به ۲ حالت زیر تقسیم می‌کنیم:

- هم‌سطر یا هم‌ستون باشند: در این صورت برای نهنگ سیاه ۶۴ حالت و برای نهنگ سفید ۱۴ انتخاب داریم: ۸۹۶= ۱۴ × ۶۴

- در ۲ سر قطر یک مستطیل قرار گرفته باشند: تعداد زیر مستطیل‌های جدول ۸ × ۸ برابر است با $\binom{۸}{۲}\times\binom{۸}{۲}$ (انتخاب ۲ خط افقی برای ضلع بالا و پایین مستطیل و ۲ خط عمودی برای ضلع چپ و راست آن)



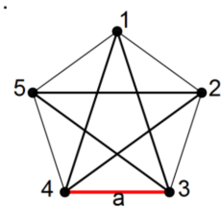
برای هر مستطیل، مهره‌ها فقط می‌توانند در ۲ حالت سر قطر غیر اصلی آن (به شکل روبه رو) قرار بگیرند که البته می‌توانند با هم جابه جا شوند. پس در این حالت $\binom{۸}{۲}\times\binom{۸}{۲}\times۲ = ۱۵۶۸$ روش برای آنها وجود دارد. با این توضیحات جواب مساله ۲۴۶۴ می‌شود که متاسفانه در بین گزینه‌ها نیست.

۳۴- گزینه‌ی (الف) درست است.

اگر یکی از مواد اولیه‌ی تولید ماده‌ی a را در یخچال قرار دهیم باید بقیه‌ی مواد اولیه‌ی آن را هم اضافه کنیم. پس می‌توانیم مواد اولیه‌ی ژله‌ی توت فرنگی و خامه‌ی شکلاتی را هرکدام در یک جعبه قرار دهیم و با تعیین کردن ترتیب مواد در جعبه‌ها، نحوه‌ی ورودشان را به صورت متوالی تعیین کنیم (!۳ و !۲ روش). به !۴ روش می‌توان نحوه‌ی ورود جعبه‌ها به یخچال را تعیین کرد. پس در کل به $۲۸۸ = !۲\times!۳\times!۴$ طریق می‌توان کیک درست کرد.

۳۵- گزینه‌ی (ب) درست است.

ابتدا کش a که رسم نشده است را اضافه می‌کنیم و در نهایت تعداد حالت‌هایی که شامل کش a هستند را از جواب کم می‌کنیم (متمم گیری). هر میخ باید به ۲ کش متصل باشد. برای انتخاب یکی از کش‌های میخ ۱، ۴ حالت داریم. فرض کنیم سر دیگر کش، میخ i باشد. از بین کش‌هایی که به i وصل‌اند یکی انتخاب شده پس ۳ انتخاب وجود دارد و برای میخ‌های دیگر به همین ترتیب ۲ و ۱ انتخاب داریم. ترتیب انتخاب کش‌ها اهمیتی ندارد پس کل حالت‌ها را تقسیم بر ۲ می‌کنیم. بنابراین $۱۲ = \frac{۴\times۳\times۲\times۱}{۲}$ حالت برای انتخاب کش‌ها وجود دارد.



کش a در ۶= ۲ × ۳ تا از حالت‌ها انتخاب شده است. (۳ انتخاب برای کش متصل به میخ ۳ و ۳ انتخاب برای کش متصل به ۴)

بنابراین به ۶= ۶ - ۱۲ راه می‌توان کش انتخاب کرد.

۳۶- گزینه‌ی (ج) درست است.

عدد a را در مبنای ۲ نمایش می‌دهیم و عدد b را در مبنای ۱۰: $۲۲ = (۱۰۱۱۰)_۲$

a	۱	۱۰	۱۱	۱۰۰	۱۱۱	۱۰۰۰	۱۱۱۱	۱۰۰۰۰	۱۰۰۱۱	۱۰۱۰۰	۱۰۱۱۰
b	۱	۴	۵	۱۲	۱۷	۳۲	۴۹	۸۰	۸۵	۹۲	۹۶

۳۷- گزینه‌ی (ب) درست است.

ادعا می‌کنیم k-۱ مهره‌ی رخ را می‌توان به $۲^k-۱$ روش در پلکانی با k ردیف پله چید. این ادعا را با استقرا ثابت می‌کنیم.

پایه‌ی استقرا: برای k=۱ حکم برقرار است.

گام استقرا: فرض کنیم برای k-۱ ردیف پله، $۲^{k-۱}-۱$ روش برای چیدن k-۲ رخ وجود داشته باشد.

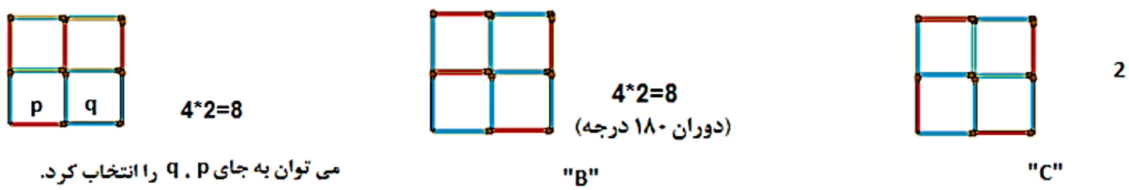
برای k ردیف، بالاترین پله را در نظر می‌گیریم، دو حالت پیش می‌آید:

- در این خانه رخ قرار دهیم. در اینصورت ستون سمت چپ حذف می‌شود و طبق فرض استقرا ۲- k رخ باقی مانده به $2^{k-1}-1$ حالت چیده می‌شوند.
- در این خانه رخ قرار ندهیم. در اینصورت در هرکدام از k-۱ ردیف باقی‌مانده باید یک رخ وجود داشته باشد. چیدن آن‌ها را از ردیف بالا شروع می‌کنیم. گذاشتن یک رخ در این ردیف ۲ حالت دارد. برای هرکدام از ردیف‌های دیگر هم با قرار دادن رخ‌های قبلی، ۲ حالت بیشتر باقی نمی‌ماند. پس طبق اصل ضرب 2^{k-1} حالت برای چیدن رخها وجود دارد.

بنابراین در مجموع 2^k-1 راه برای چیدن رخها داریم و حکم ثابت شد. پاسخ مساله به ازای k=8 ، ۲۵۵ می‌شود.

۳۸- گزینه‌ی (د) درست است.

حالت‌های ممکن و تعداد روش‌هایی که می‌توان آن‌ها را دوران داد تا شکل‌های مجاز بدست آید در شکل‌های A و B و C نشان داده شده است:



"A" "B" "C"

پس در مجموع ۱۸= ۲ + ۸ + ۸ روش برای باقی گذاشتن ۴ کبریت مطابق خواسته‌ی مساله وجود دارد.

۳۹- گزینه‌ی (د) درست است.

رقم اول از سمت چپ نمی‌تواند ۲ باشد. چون تمـــام اعداد بدست آمده از انتقال از آن کمتـر یا مسـاویند. پس این رقم حتماً ۱ است. اگر ارقام "۱۲" به همین ترتیب در عدد ظاهر شوند بعد از آن همه باید "۱۲" یا "۲۲" باشند. چون اگر "۱۱" باشد ۱۲۱۱x با انتقال به ۱۱x۱۲ تبدیل می‌شود و اگر "۲۱" باشد ۱۲۲۱x با انتقال به ۱x۱۲۲ می‌رسد. اعداد زیر ویژگی خواسته شده را دارند:

۱۱۱۱۲ ۱۱۲۲۲ ۱۱۲۱۲
۱۱۱۲۲ ۱۲۲۲۲ ۱۲۱۲۲

۴۰- گزینه‌ی (ه) درست است.

نفر اولی که وارد می‌شود ۸ انتخاب دارد و همسر او ۲ انتخاب. در هر ۲ حالت یکی از زوجها باید صندلـــی‌های p و q را انتخاب کنند و به ۲ روش می‌توانند بنشینند که انتخاب زوج هم ۳ حالت دارد.
نفر بعدی که وارد شود ۴ انتخاب دارد و همسرش ۲ انتخاب. و تن‌ها زوج باقی‌مانده هم در صندلی‌های باقی‌مانده به ۲ روش می‌توانند بنشینند.
پس پاسخ برابر ۱۵۳۶= ۲ × ۲ × ۴ × ۲ × ۳ × ۲ × ۸ است .