جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
سیزدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۱

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۴۰	-	۱۲۰

توضیحات مهم

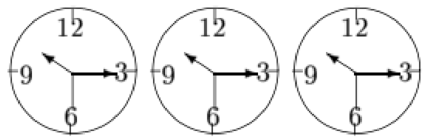
استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۴۰ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

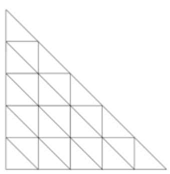
۱- سه ساعت با صفحه‌ی دوار به نام‌های A، B، و C داریم که هر سه ساعت ″۳۰ : ´۱۵ : ۱۰ را نشان می‌دهند (مانند شکل مقابل). در ساعت A، ثانیه شمار تکان نمی‌خورد ولی صفحه (مستقل از عقربه‌ها) و ساعت شمار و دقیقه شمار طوری حرکت می‌کنند که ساعت هر لحظه زمان درست را نشان می‌دهد.



در ساعت B، دقیقه‌شمار تکان نمی‌خورد، ولی صفحه (مستقل از عقربه‌ها) و ساعت شمار و ثانیه‌شمار طوری حرکت می‌کنند که ساعت هر لحظه زمان درست را نشان می‌دهد. در ساعت C، ساعت شمار تکان نمی‌خورد، ولی صفحه (مستقل از عقربه‌ها) و دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمار طوری حرکت می‌کنند که ساعت هرلحظه زمان درست را نشان می‌دهد. فرض کنید ۵۰ ساعت از وضعیت داده‌شده گذشته است. در این مدت، چند بار وضعیت این سه ساعت کاملاً مشابه است (یعنی صفحه و ساعت شمار و دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمار در هر سه ساعت در یک وضعیت قرار دارند)؟ حالت اولیه را نیز یک وضعیت مشابه به‌حساب آورید.

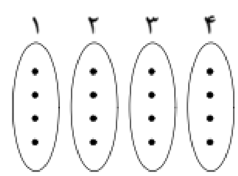
الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹

۲- در شکل مقابل به دل خواه در یکی از خانه‌های مثلثی شکل یک مهره قرار می‌دهیم. در هر حرکت می‌توان این مهره را از خانه‌ی فعلی آن برداشت و پس از طی یک مسیر در یک‌خانه‌ی جدید گذاشت. این مسیر باید طوری باشد که دقیقاً یک پاره‌خط افقی، یک پاره‌خط عمودی و یک پاره‌خط مورب را قطع کند. این مهره در هر خانه‌ای که قرار بگیرد آن را سیاه می‌کند توجه کنید که این مهره خانه‌هایی را که در طول مسیر از آن‌ها عبور می‌کند سیاه نمی‌کند. اگر شکل در ابتدا کاملاً سفید باشد، پس از ۲۰ بار حرکت، حداکثر چند خانه را می‌توان سیاه کرد؟



الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۹

۳- می‌خواهیم هر نقطه موجود در دسته‌ی i در شکل مقابل را با یک پاره خط به دقیقاً یک نقطه در دسته‌ی i + ۱ وصل کنیم (i ≤ ۳) به طوری که هیچ دو نقطه‌ای از دسته‌ی i ام به یک نقطه از دسته‌ی i + ۱ ام وصل نباشند. همچنین می خواهیم هر نقطه موجود در دسته‌ی ۴ را با یک پاره خط به دقیقاً یک نقطه در دسته‌ی ۱ وصل کنیم به طوری که هیچ دو نقطه‌ای از دسته‌ی ۴ به یک نقطه از دسته اول وصل نباشند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



الف) $4^3 \times 2^4 \times 3^4$ ب) $4^4 \times 2^4 \times 3^4$ ج) $4^4 \times 2^4 \times 3^5$ د) $4^3 \times 2^5 \times 3^3$ ه) $4^4 \times 2^3 \times 3^3$

۴- جایگشت ۱۲۳۴۵۶ را در نظر بگیرید. در یک حرکت می‌توانیم جای دو عدد i و j را باهم عوض کنیم اگر $|i-j| \geq 2$ پس از انجام چند حرکت به جایگشت $\pi = p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ می‌رسیم.

الف) ۶۵۴۳۲۱ ب) ۲۱۳۴۵۶ ج) ۴۳۱۲۶۵

د) ۳۲۴۶۱۵ ه) تمام گزینه‌های فوق می‌تواند باشد

۵- سه دستور A، B و C داده شده‌اند که هر کدام به عنوان ورودی زوج مرتب (x ،y) را می‌گیرد و خروجی زیر را تولید می‌کند:

- دستور A خروجی با مقدار (x + ۳ ،y) را تولید می‌کند.
- دستور B خروجی با مقدار (x ،y − ۲) را تولید می‌کند.
- دستور C خروجی با مقدار (y ،x) را تولید می‌کند.

به تعدادی دستور پشت سرهم یک «برنامه» می گوی‌ام. هر برنامه به‌عنوان ورودی زوج مرتب (x ،y) را می‌گیرد و خروجی آن به‌صورت زیر تعیین می‌شود: دستور اول بر روی ورودی اجرا می‌شود، سپس دستور دوم خروجی دستور اول را به‌عنوان ورودی دریافت می‌کند و اجرا می‌شود، .... و دستور i + ۱ ام خروجی دستور i ام را به‌عنوان ورودی دریافت می‌کند و اجرا می‌شود. خروجی برنامه، خروجی دستور آخر است. به‌طور مثال برنامه AAC را در نظر بگیرید که ورودی آن (۲، ۱) است. خروجی این برنامه (۷، ۲) خواهد بود (دستورها از چپ به راست اجرا می‌شوند). فرض کنید یک برنامه داریم که ورودی آن (۱، ۲) و خروجی آن (۵، ۸) است. حداقل تعداد دستورهای این برنامه چند تاست؟

الف) ۵ — ب) ۶ — ج) ۷ — د) ۸ — ه) ۹

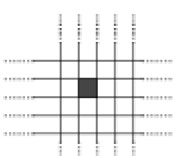
۶- همان سؤال قبل، با این تفاوت که خروجی دستورهای A، B و C به‌صورت زیر است:

- دستور A خروجی (x + ۱ ،y) را تولید می‌کند.
- دستور B خروجی (x ،y + ۱) را تولید می‌کند.
- دستور C خروجی (y ،x) را تولید می‌کند.

تعداد برنامه‌هایی را پیدا کنید که از دستور C دقیقاً یک‌بار استفاده کرده باشد و به ازای ورودی (۰، ۰) خروجی (۲، ۲) را تولید کند.

الف) ۶ — ب) ۱۸ — ج) ۲۴ — د) ۳۰ — ه) ۳۲

۷- یک جدول ۲ بعدی نامتناهی را در نظر بگیرید که در ابتدا تمام خانه‌های آن سفید است. در مرحله‌ی اول یکی از خانه‌های آن را به‌دلخواه سیاه می‌کنیم (شکل مقابل). از مرحله دوم به بعد، در هر مرحله کلیدی خانه‌هایی که ۱، ۲ و ۳ همسایه سیاه دارند را مشخص می‌کنیم و سپس همه‌ی آن‌ها را سیاه و بقیه‌ی خانه‌ها را سفید می‌کنیم. (دو خانه مجاورند اگر ضلع مشترکی داشته باشد.)



بزرگ‌ترین K ای را پیدا کنید که خانه‌ای که در مرحله اول سیاه شده بود در مرحله‌ی K ام هم سیاه شود.

الف) ۱ — ب) ۷ — ج) ۸ — د) ۱۶ — ه) K هر قدر می‌تواند بزرگ باشد.

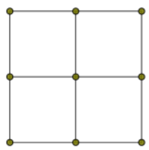
۸- تعداد زیرمجموعه‌های {۱۰، ...، ۲، ۱} که مجموع اعضای آن بر ۸ بخش‌پذیر چند تاست؟

الف) ۱۲۵ — ب) ۱۲۶ — ج) ۱۲۷ — د) ۱۲۸ — ه) ۱۲۹

۹- Kعدد رخ را در یک صفحه‌ی شطرنجی ۱۰ × ۱۰ طوری قرار داده‌ایم که تمام صفحه را تهدید کنند. یک رخ در خانه‌ی (x ،y)، همه‌ی خانه‌های سطر x و ستون y را تهدید می‌کند. همچنین می‌خواهیم که هر رخ دقیقاً توسط ۴ رخ دیگر تهدید شود. حداقل K چند است؟

الف) ۹ — ب) ۱۰ — ج) ۱۳ — د) ۱۶ — ه) ۲۴

۱۰- نقشه‌ی یک استان در شکل مقابل نشان داده‌شده است که در آن هر نقطه یک شهر و هر خط یک جاده بین دو شهر است. فاصله‌ی دو شهر A و B برابر است با حداقل تعداد جاده‌هایی که باید طی کنیم تا از A به B برسیم. یک دزد در یکی از این شهرها که از قبل مشخص نیست مخفی شده است. برای پیدا کردن این دزد مجاز هستیم به صورت زیر عمل کنیم.



- در ابتدای هر روز یکی از شهرها به نام A را انتخاب و آن را جست و جو می‌کنیم. اگر دزد در آن شهر بود که او را دست‌گیر می‌کنیم. ولی اگر نبود به کمک دستگاهی فاصله‌ی شهر A تا شهری که دزد در آن قرار دارد را پیدا می‌کنیم.
- در انتهای هر روز دزد از شهری که در آن قرار دارد به یکی از شهرهای مجاور آن می‌رود (دو شهر را مجاور گوی‌ام اگر با یک جاده به هم متصل باشند). دقت کنید که دزد حتماً جای خود را عوض می‌کند.

حداقل به چند روز نیاز داریم تا مطمئن باشیم که دزد را دستگیر می‌کنیم؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸

د) ۹ ه) با گذشت هر چند روز نمی‌توان مطمئن بود که دزد را پیدا کرده‌ایم

۱۱- همان سؤال قبل اگر نقشه‌ی استان به صورت مقابل باشد.

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶

د) ۷ ه) با گذشت هر چند روز نمی‌توان مطمئن بود که دزد را پیدا کرده‌ایم

۱۲- در خانه‌ی (۰، ۰) جدول مختصات عدد ۱ را می‌نویسم. فرض کنید در ابتدای هر مرحله در خانه‌ی (x ,y) عدد i نوشته شده است. در آن مرحله i را پاک می‌کنیم و یکی از چهار حرکت زیر را انجام می‌دهیم:

- در خانه‌ی $(x + ۱ ,y)$ عدد $۴i$ را می‌نویسیم،
- در خانه‌ی $(x ,y + ۱)$ عدد $۴i + ۱$ را می‌نویسیم،
- در خانه‌ی $(x - ۱ ,y)$ عدد $۴i + ۲$ را می‌نویسیم، یا
- در خانه‌ی $(x ,y - ۱)$ عدد $۴ i + ۳$ را می‌نویسیم.

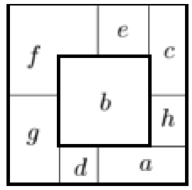
پس از انجام چند مرحله متوجه می‌شویم در خانه (۱، ۱) عدد K نوشته‌شده است. K کدام گزینه می‌تواند باشد؟

الف) ۶۰۳۹ ب) ۱۰۸۲ ج) ۱۳۷۴ د) ۵۱۳۲ ه) ۵۹۲۱

۱۳- کامران یک دستگاه عدد شمار ساخته است که ۷ لامپ دارد. معنی روشن یا خاموش بودن لامپ i ام به ترتیب ۱ یا ۰ بودن رقم i ام یک عدد ۷ رقمی در مبنای ۲ است. مثلاً اگر فقط لامپ سوم روشن باشد دستگاه عدد ۸ را نمایش می‌دهد. در ابتدا همه‌ی لامپ‌ها خاموش هستند. این دستگاه دکمه‌ای دارد که با فشار آن عدد دستگاه یک واحد افزایش می‌یابد. کامران با ۶۴ بار فشار دادن دکمه عدد اولیه‌ی صفر را به ۶۴ تبدیل می‌کند. اگر d_i برابر با تعداد دفعاتی باشد که لامپ i ام تغییر وضعیت داده است، $\sum_{i=۱}^{۷} d_i$ برابر چه مقدار است؟

الف) ۱۲۹ ب) ۱۲۷ ج) ۶۱ د) ۶۵ ه) ۶۴

۱۴- ۸ مربع هم اندازه با رنگ‌های a، b، . . . و h را یکی پس از دیگری در یک صفحه چیده‌ایم (هر مربع بر روی مربع‌های قبلی قرار می‌گیرد) و شکل مقابل حاصل‌شده است. اگر مربع با رنگ a را A بنامیم، و مربع با رنگ b را B و ...، به چه ترتیبی این مربع‌ها را چیده‌ایم؟



الف) E، D، G، A، B، H، C و F
ب) G، D، A، H، C، E، F و B
ج) E، C، H، A، D، G، F و B
د) F، E، C، H، A، D، G و B
ه) D، G، H، A، E، C، F و B

۱۵- همه‌ی رشته‌های تولید شده از حروف a و b را به ترتیب طول رشته و در صورت مساوی بودن طول‌ها به ترتیب الفبایی مرتب می‌کنیم. مثلاً هشت رشته‌ی اول عبارت‌اند از: a، b، aa، ab، ba، bb، aaa، aab. رشته‌ی ۱۳۸۱ ام کدام است؟

الف) ababbaabba
ب) babab bbab
ج) ababbaabab
د) babaabbaab
ه) ababaaaba

۱۶- ۲۰ عدد کاسه داریم که در هر یک می‌توانیم یک پنج‌تومانی قرار دهیم یا آن را خالی بگذاریم. هم‌چنین ۱۰ کاسه‌ی دیگر داریم که در هر یک می‌توانیم یک ۲ تومانی قرار دهیم یا آن را خالی بگذاریم. به چند طریق می‌توانیم در این کاسه‌ها، سکه‌هایی ۵ تومانی و ۲ تومانی قرار دهیم تا مجموع سکه‌های موجود در کاسه‌ها ۸۱ تومان شود؟

الف) $\binom{20}{15}+\binom{20}{13}+\binom{10}{3}+\binom{10}{8}$
ب) $\binom{20}{15}\times\binom{20}{13}\times\binom{10}{3}\times\binom{10}{8}$
ج) $\dfrac{15!+8\times13!\times14}{20!}$
د) $\binom{13}{8}+\binom{15}{3}$
ه) $\binom{20}{15}\times\binom{10}{3}+\binom{20}{13}\times\binom{10}{8}$

۱۷- منظور از یک زیر دنباله تعدادی عدد پشت سر هم از یک دنباله است. مثلاً (۴، ۳، ۲) زیر دنباله‌ی (۵، ۴، ۳، ۲، ۱) هست ولی (۵، ۴، ۱) زیر دنباله‌ی آن نیست. هم‌چنین یک زیر دنباله مضرب پنج است اگر جمع اعضای آن مضرب پنج باشد. مثلاً (۵) یا (۴، ۳، ۲، ۱) زیر دنباله‌های مضرب ۵ از (۵، ۴، ۳، ۲، ۱) هستند ولی (۳، ۲، ۱) مضرب ۵ نیست. تعداد زیر دنباله‌های ناتهی مضرب ۵ دنباله‌ی (۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۸، ۳، ۱، ۱، ۳، ۱، ۰، ۳، ۰، ۰، ۲) چه قدر است؟

الف) ۴
ب) ۱۸
ج) ۲۲
د) ۲۴
ه) ۲۶

۱۸- یک سالن با ۱۰۳ ردیف صندلی داریم که در هر ۵ ردیف متوالی آن در مجموع ۲۰۰ نفر نشسته‌اند. در این سالم حداقل و حداکثر چند نفر نشسته‌اند؟

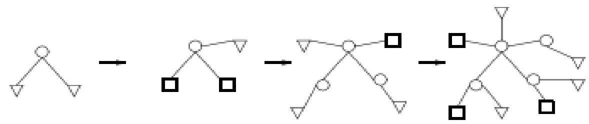
الف) ۴۲۰۰/۴۰۰۰
ب) ۴۲۰۰/۴۱۲۰
ج) ۴۱۲۰/۴۰۰۰
د) ۴۱۲۰/۴۱۲۰
ه) چنین حالتی ممکن نیست.

۱۹- اگر f یک تابع از اعداد صحیح و مثبت به اعداد صحیح و مثبت باشد که $f(n+1) > f(n)$ و $f(f(n)) = 3n$. مقدار $f(9)$ چه قدر است؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۶ ه) ۱۸

۲۰- طبق قواعد زیر هر شکل از شکل قبل به این صورت ساخته می‌شود:

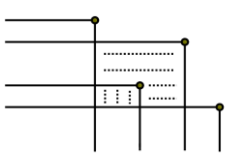
- هر مربع تبدیل به دایره می‌شود.
- هر مثلث تبدیل به مربع می‌شود.
- در پایان، به اجزاء هر دایره (حتی دایره‌های جدید)، یک مثلث جدید می‌کشی‌ام و به آن دایره وصل می‌کنیم.



در بالا چهار شکل اول این سری را نشان داده‌ایم. شکل یازدهم چند تا مثلث دارد؟

الف) ۸۹ ب) ۹۰ ج) ۱۲۱ د) ۱۲۳ ه) ۱۲۵

۲۱- یک ریاضی‌دان در دفتر کار خود یک تخته‌سیاه خیلی بزرگ دارد. روزی پسرش از وی خواست تا با او بازی کند. ریاضی‌دان که به بازی‌های کودکانه چندان آشنایی نداشت، به فرزندش پیشنهاد کرد بازی «رولینگ» را انجام دهند. ریاضی‌دان به پسرش گفت که در این بازی، پسر با گچ یک نقطه روی تخته بگذارد و سپس ریاضی‌دان از آن نقطه دو نیم‌خط رسم کرد: یک نیم‌خط افقی از نقطه به سمت چپ و یک نیم‌خط عمودی از نقطه به پایین. پسر که از این بازی کلافه شده بود از پدرش خواست تا یک بازی دیگر مثل «کوئیدیچ» را بازی کنند، ولی ریاضی‌دان برای آن‌که پسرش راضی شود به او گفت: « اگر بتوانی با انتخاب ۷ نقطه بیشترین ناحیه‌های بسته را ایجاد کنی تو را به تماشای مسابقه‌ی کوئیدیچ خواهم برد». یک ناحیه‌ی بسته، ناحیه‌ای از تخته است که دور تا دور آن به وسیله‌ی نیم‌خط‌ها بسته‌شده باشد. مثلاً در شکل مقابل با انتخاب ۴ نقطه، دو ناحیه‌ی بسته ایجاد کرده‌ایم که با هاشور مشخص شده‌اند.



پسر با انتخاب ۷ نقطه حداکثر چند ناحیه‌ی بسته می‌تواند ایجاد کند؟

الف) ۱۰ ب) ۱۲ ج) ۱۵ د) ۱۸ ه) ۲۰

۲۲- یک قورباغه روی نقطه‌ی صفر محور مختصات نشسته است. این قورباغه می‌تواند به سمت جلو بجهد، ولی طول پرش آن در i امین جهش به‌دلخواه خودش i یا ۱ + i واحد است. او پس از چند جهش می‌تواند به نقطه‌ی ۱۳۸۱ برسد؟ و چند جهش دیگر لازم است تا ازآنجا به نقطه‌ی ۲۰۰۳ برسد؟

الف) ۵۲ و ۱۱ ب) ۵۲ و ۱۲ ج) ۵۲، نمی‌تواند برسد

د) ۳۷ و ۹ ه) به هیچ‌کدام نمی‌تواند برسد.

۲۳- یک بازی دو نفره بر روی عبارت (? *(? * ?)) انجام می‌شود. در این عبارت به‌جای هر علامت ؟ باید یکی از اعداد ۰، ۱ یا ۲

۱ ۲ ۱

(به‌صورت غیرتکراری) و به‌جای * یکی از عملگرهای × (ضرب) یا + (جمع) قرار گیرد. بازی به این صورت است: نفر اول یکی از اعداد را برای اولین ؟، سپس نفر دوم یک عملگر و یک عدد برای ؟ * بعدی، در مرحله‌ی آخر نفر اول همین کار را برای ؟ * بعدی انجام می‌دهد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف) نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که عدد حاصل زوج شود.

ب) نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که عدد حاصل زوج شود.

ج) نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که عدد حاصل فرد شود.

د) نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که عدد حاصل فرد شود.

ه) هر دو گزینه‌های الف و ب درست‌اند.

۲۴- ۱۰ سکه دور دایره‌ای چیده شده‌اند که یک در میان شیر (H) و خط (T) هستند. در هر مرحله می‌توانیم هر سه تا سکه پشت سر هم را که HTH یا THT باشند انتخاب کنیم و هر سه را برگردانیم. با تکرار این کار، حداکثر چه تعداد H می‌توانیم داشته باشیم؟

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۹

۲۵- عبارت بدون پرانتز $a-b/c*d+e$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که مقدار این عبارت برابر است با $x=((a-((b/c)*d))+e)$ به چند طریق می‌توان این عبارت را پرانتزگذاری کرد که به ازای همه‌ی مقادیر a یا e، حاصل آن همان مقدار x باشد؟ در عبارت پرانتزگذاری شده به ازای هر عملگر حداکثر یک جفت پرانتز می‌توان گذاشت، مثلاً $a+((b/c))*d+e$ حاوی یک جفت پرانتز اضافه است.

الف) ۱۶ ب) ۳۲ ج) ۱۸ د) ۲۴ ه) ۸

۲۶- مجموعه‌ی S «دوستانه» است اگر برای هر $x \in S$ حداقل یکی از $x+1$ و $x-1$ هم در S باشد. مثلاً {۵۰۰، ۴۹۹، ۲، ۱} دوستانه است. چه تعداد مجموعه‌ی دوستانه با ۵ عضو از اعداد ۱ تا ۱۰۰ داریم؟

الف) ۴۶۵۶ ب) ۹۲۰۸ ج) ۹۲۱۶ د) ۱۰۰۰۰ ه) ۱۸۳۳۶

۲۷- ۷ تا کره‌ی یک شکل و یک رنگ داریم که از جنس های متفاوت ساخته شده‌اند. می دانیم که حداقل ۴ تا از این کره‌ها از یک جنس هستند (به این جنس، «غالب» می گوی‌ام.) دو تا کره را بر می داریم و به هم می چسبانیم، اگر از یک جنس باشند جرقه می زند، در غیر این صورت اتفاقی نمی افتد. با حداقل چند بار چسباندن کره‌ها به هم مطمئناً می توان یک کره پیدا کرد که از جنس غالب باشد؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۲۸- ترکیب دو دنباله‌ی مرتب A و B به ترتیب با اندازه‌های n و m یک دنباله‌ی مرتب به اندازه‌ی n + m تولید می‌کند و این کار به اندازه‌ی m + n هزینه دارد. (مثلاً اگر (۵، ۳، ۲، ۱) = A و (۶، ۴) = B باشد (۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱) = C ترکیب این دو دنباله و هزینه‌ی تولید آن ۶ است.) برای ترکیب سه دنباله، ابتدا دو تای آن‌ها را باهم ترکیب و دنباله‌ی حاصل را با دنباله‌ی سوم تکیب می کنیم. بدیهی است که انتخاب دو دنباله‌ی اول در کل هزینه‌ی ترکیب مؤثر است. حال فرض کنید ۷ دنباله به انادازه های ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۸، و ۱۰ داریم. کم ترین هزینه‌ی کل برای ترکیب این ۷ دنباله چه قدر است؟

الف) ۴۸ ب) ۱۰۵ ج) ۱۳۴ د) ۱۴۴ ه) ۱۶۲

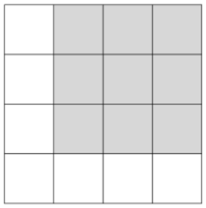
۲۹- در یک جدول، دو خانه را همسایه می گوی‌ام اگر در یک نقطه یا در یک ضلع اشتراک داشته باشند (بنابراین، هر خانه حداکثر ۸ همسایه دارد). می‌خواهیم در یک جدول ۱۰ × ۱۰، K خانه را علامت بزنیم به‌طوری‌که هر خانه‌ی علامت نخورده حداقل یک همسایه علامت خورده داشته باشد. K حداقل چه قدر است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۴ ج) ۱۵ د) ۱۶ ه) ۱۷

۳۰- یک n – ضلعی را «کامل» می‌نامیم اگر به ازای هر عدد صحیح i $(1 \le i \le n)$، دقیقاً یک ضلع به طول i داشته باشد و هر دو ضلع مجاور آن بر هم عمود باشند. کم‌ترین عدد n که به ازای آن، n – ضلعی کامل وجود دارد چند است؟

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۸ د) ۱۲ ه) ۱۶

۳۱- بازی یک نفره‌ی «کوئیدیچ» به شکل زیر انجام می‌شود: یک صفحه ۴ × ۴ که همه‌ی ۱۶ خانه‌ی آن سفید هستند در اختیار داریم. در هر حرکت، یکی خانه را انتخـــاب می‌کنیـــم. با انتخاب هر خانه، رنگ آن خانــه و همــه‌ی خانه‌هایـــی کــه در بالا و سمت راست آن هستند عوض می شود (از سفید به سیاه یا از سیاه به سفید تغییر می یابد). مثلاً در شکل مقابل با انتخاب خانه‌ی دوم از ردیف سوم، رنگ بعضی از خانه‌ها سیاه شده است.



می‌خواهیم با K بار انجام این حرکت، صفحه را به‌صورت شطرنجی درآوریم (یعنی رنگ هیچ دو خانه‌ای که در یک ضلع مشترکند، یکی نباشد). کم‌ترین مقدار K چه قدر است؟

الف)۶ ب)۷ ج) ۸ د)۱۵ ه)۱۶

۳۲- ۳۰ دانش‌آموز در یک کلاس حضور دارند که همه‌ی آن‌ها افرادی راست‌گو هستند. می‌دانیم یکی از آن‌ها المپیادی است ولی او را نمی‌شناسیم. می‌خواهیم با پرسیدن K سؤال، فرد مزبور را بیابیم. در هر سؤال می‌توانیم یکی از دانش‌آموزان را انتخاب کنیـم و به او آسم چند نفر از دانش‌آموزان را بگوییم و از او بپرسیم که آیا فرد المپیادی، یکی از آن چند نفر است یا خیر؟ او هم فقط به این سؤال جواب «بله» یا «خیر» می دهد. K حداقل چه قدر باشد که با پرسیدن K سؤال همواره مطمئن باشیم می‌توانیم فرد مورد نظر را بشناسیم؟

الف)۳ ب)۵ ج)۷ د)۱۰ ه)۱۵

۳۳- اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ را به این صورت در یک سطر می‌نویسیم: ابتدا عدد ۱، سپس بدون فاصله عدد ۱۰۰۰، بعد ۲، سپس ۹۹۹، و . . . . مثلاً ۱۸ رقم ابتدای این سطر به این صورت است: ۱۱۰۰۰۲۹۹۹۳۹۹۸۴۹۹۷۵.

۴۹۰ امین رقم نوشته شده در این سطر چند است؟

الف) ۰ یا ۹ ب)۱ یا ۸ ج)۲ یا ۷ د)۳ یا ۶ ه)۴ یا ۵

۳۴- یک رشته‌ی دودویی n – رقمی را یک «عدد جهانی» می‌نامیم در صورتی که وقتی خودش را با معکوسش جمع بزنیم دو بر یک ایجاد نشود. مثلاً فرض کنید n = ۶. در این صورت $(۰۱۰۰۰۱)_۲$ یک عدد جهانی است چون معکوس آن $(۱۰۰۰۱۰)_۲$ است و موقع جمع زدن این دو عدد، هیچ دو رقم ۱ روی‌هم قرار نمی‌گیرند تا موقع جمع زدن دو بر یک به وجود آید. (در واقع دو بر یک، معادل ده بر یک، در جمع اعداد دودویی است و وقتی ایجاد می‌شود که جمع ارقام واقع در یک ستون، بیش‌تر از ۱ شود). تعداد اعداد دودویی جهانی ۱۰ رقمی چه قدر است؟

الف)$۲^۵$ ب) $۲^{۱۰}$ ج) $۳^۵$ د) $۳^۸$ ه) $۴^۴$

۳۵- در یک صفحه شطرنج (۸ × ۸) به چند روش می‌توان ۸ رخ در خانه‌های سیاه قرار دارد که هیچ دو رخی یکدیگر را تهدید نکنند (در یک سطر یا یک ستون نباشند) ؟

الف) ۸!/۲ ب)۱۲۰ ج)۵۷۶ د)۴۰۹۶ ه)۱۴۴۰۰

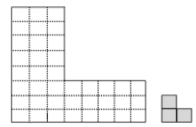
۳۶- دو تابع A و B به‌صورت زیر بر روی اعداد طبیعی تعریف‌شده‌اند.

$$A(n)=\begin{cases} ۱ & n=۱ \\ B(n+۱)-۱ & n>۱ \end{cases} \qquad B(n)=\begin{cases} ۱ & n\le ۲ \\ A(n-۲)+۲ & n>۲ \end{cases}$$

مقدارهای A(۱۳۸۱) و B(۲۰۰۳) چه قدرند؟

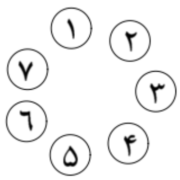
الف)۱۳۸۱ و ۲۰۰۳ ب)۱۳۸۰ و ۲۰۰۲ ج)۱۳۸۲ و ۲۰۰۳ د)۱۳۸۲ و ۲۰۰۴ ه)۱۳۸۰ و ۲۰۰۳

۳۷- به چند طریق می‌توان سالن به شکل مقابل را با موزاییک نشان داده شده کاملاً پوش‌اند به‌طوری‌که موزاییک‌ها روی‌هم قرار نگیرند؟



الف) ۸ ب) ۱۲ ج) ۱۴ د) ۱۶ ه) ۲۰

۳۸- بهداد مشغول انجام بازی «دامبلدور» است. این بازی به این صورت انجام می‌شود: ۷ سنگ با شماره‌های ۱ تا ۷ به‌صورت زیر قرار دارند. در حرکت i ام بازی، بهداد به‌صورت یک – پا ۱ – i سنگ را در جهت ساعت‌گرد رد کرده و به‌صورت جفت – پا روی سنگ بعد می‌پرد و می‌ایستد. برای مثال بهداد در شروع بازی روی سنگ ۱ است. او در حرکت اول جفت – پا روی سنگ ۲ می پرد. در حرکت دوم یک – پا روی سنگ ۳ پریده و سپس جفت پا روی سنگ ۴ می‌پرد.



در حرکت سوم، یک – پا روی سنگ‌های ۵ و ۶ پریده و سپس جفت – پا روی سنگ ۷ می‌پرد و بالاخره، در حرکت چهارم، به صورت یک – پا روی سنگ‌های ۱، ۲، و ۳ می پرد و روس سنگ ۴ به صورت جفت – پا می‌ایستد. آیا می‌توانید مشخص کنید بهداد پس از حرکت ۱۳۸۱ ام روی کدام سنگ خواهد بود؟

الف) ۱ ب) ۲ یا ۳ ج) ۴ د) ۵ یا ۶ ه) ۷

۳۹- روز دیگر محمد به بازی «اسنیپ» پرداخت. این بازی شبیه بازی دامبلدور است. در این بازی ۱۰ سنگ ۱ تا ۱۰ به صورت دایره‌ای شکل قرار گرفته‌اند. محمد روی سنگ ۱ قرار دارد. او در حرکت i ام باز هم روی ۱ – i سنگ به‌صورت یک – پا و سپس روی سنگ بعدی جفت – پا می‌پرد. اما فرق مهم این دو بازی در این است که در این بازی هرگاه محمد به‌صورت جفت – پا روی سنگ ۱ بپرد، جهت پریدنش را عوض می‌کند. مثلاً تصور کنید پس از حرکت سوم او را روی سنگ ۷ قرار دارد. او در حرکت چهارم به‌صورت یک – پا به ترتیب روی سنگ‌های ۸، ۹ و ۱۰ خواهد پرید و سپس به‌صورت جفت – پا روی سنگ ۱ می‌پرد. حال جهت حرکتش عوض می‌شود و در حرکت پنجم، به‌صورت یک – پا از روی سنگ‌های ۱۰، ۹، ۸، و ۷ خواهد گذشت و به‌صورت جفت – پا روی سنگ ۶ می‌پرد. مشخص کنید پس از حرکت ۲۰۰۳ ام روی کدام سنگ خواهد بود؟

الف) ۱ یا ۲ ب) ۳ یا ۴ ج) ۵ یا ۶ د) ۷ یا ۸ ه) ۹ یا ۱۰

۴۰- در یک خانواده‌ی مردسالار مجموعه‌ی «اجداد» یک نفر برابر است با پدر او، پدر پدر او و . . . . و مجموعه‌ی «بزرگ‌تر»های یک نفر برابر است با اجداد و برادران اجداد او. در روز عید، بزرگ فامیل که هیچ برادر یا بزرگ‌تری ندارد یک سکه به یکی از پسران خود می‌دهد. هرکس که سکه را دریافت کند یا آن را برای خود بر می‌دارد و یا آن را به یکی از پسرانش یا یکی از بزرگ‌ترهایش می‌بخشد. اگر G نام فامیل و P، Q، R، و S نام ۴ نفر از اعضاء آن فامیل باشد که در یک دور بازی مشارکت داشتند، کدام‌یک از ترتیبات دریافت سکه زیر ممکن نیست؟

الف) $G \to P \to R \to Q \to S \to R$

ب) $G \to P \to Q \to R \to S \to P$

ج) $G \to P \to Q \to R \to S \to Q \to P$

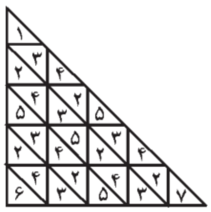
د) $G \to P \to R \to Q \to S \to R$

ه) $G \to P \to Q \to R \to S \to Q \to S$

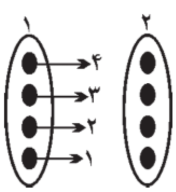
«پاسخنامه تشریحی»

۱- چون ثانیه‌شمارِ صفحه A ثابت است، باید بقیه ثانیه‌شمارها (که متحرک هستند) مثل آن ثانیه‌شمار باشند. این موضوع برای عقربه‌های دقیقه‌شمار و ساعت شمار نیز مصداق دارد. بنابراین تن‌ها حالتی که هر سه عقربه در هر سه ساعت وضعیت مشابه دارند در ساعت ″۳۰′:۱۵:۱۰ هست. لازم به ذکر است که صفحات آن سه ساعت نیز مشابه هم خواهد بود چون در هرلحظه در هریک از آن‌ها، صفحات چنان می‌چرخند که ساعت زمان درست را نشان دهد. بنابراین از هر ۱۲ ساعت یک‌بار، وضعیت سه ساعت کاملاً مشابه به هم خواهد بود که در طول ۵۰ ساعت، با احتساب حالت اولیه، دقیقاً ۵ بار آن وضعیت اتفاق خواهد افتاد.

۲- مثلثی که از امتداد دادن دو ضلع از سه ضلع مثلثی پدید می‌آید را «مقابل» آن مثلث گوی‌ام. با کمی توجه معلوم می‌شود که در هر مرحله می‌توان مهره را از یک خانه به خانه مقابل آن برد. در شکل مقابل تمام خانه‌هایی که مستقیم و یا با واسطه می‌توانند مقابل هم باشند با یک عدد مشابه، شماره‌گذاری شده‌اند که بیشترین خانه‌ها با عدد مشابه، ۶ تا می‌باشند که تعداد حرکات لازم برای گذر از آن ۶ خانه کمتر از ۲۰ است.



۳- در شکل مقابل مقصد هریک از پاره‌خط‌های خارج شده از چهار نقطه به ترتیب به ۴، ۳، ۲ و ۱ طریق مشخص می‌شود که طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر !۴ می‌شود. این موضوع از دسته ۲ به دسته ۳ و از دسته ۳ به دسته ۴ و نیز از دسته ۴ به دسته ۱ نیز به همین صورت است. بنابراین جواب مورد نظر $(4!)^4$ یا $2^4 \times 3^4 \times 4^4$ است.



۴- کافی است ثابت کنیم جای هر دو عدد مانند x و y را می‌توانیم عوض کنیم، بدون آن‌که جای بقیه اعداد عوض شود:

- اگر $|x-y| \geq 2$ آنگاه جای آن دو عدد را با هم عوض می‌کنیم.
- اگر $|x-y| < 2$ آنگاه عددی مانند z وجود دارد به‌طوری‌که $|x-z| \geq 2$ و $|y-z| \geq 2$. در این صورت جای x را با z و سپس جای z را با y عوض می‌کنیم که در این صورت فقط جای دو عدد x و y باهم عوض خواهد شد.

۵- چون مقدار هر دو مؤلفه افزایش یافته‌اند و از بین دو دستور A و B فقط دستور A مقدار مؤلفه را افزایش می‌دهد معلوم می‌شود که در طول برنامه حتماً باید از دستور C استفاده کرد. از طرف دیگر چون دو عدد ۱ و ۵ به اندازه ۴ واحد از هم اختلاف دارند (که مضرب ۳ نیست) بنابراین لازم است از دستور B نیز حتماً استفاده شود و در ضمن در هر مرحله حداکثر ۳ واحد به مجموع مؤلفه‌ها (که در ابتدا ۱+۲ یعنی ۳ و در انتها ۵+۸ یعنی ۱۳ است) اضافه می‌شود، بنابراین حداقل ۴ بار نیز باید از دستور A استفاده کرد که در این صورت حداقل ۶ دستور نیاز خواهد بود. با ۶ دستور به شکل زیر می‌توان به هدف رسید:

$$(2,1) \xrightarrow{A} (5,1) \xrightarrow{B} (5,-1) \xrightarrow{C} (-1,5) \xrightarrow{A} (2,5) \xrightarrow{A} (5,5) \xrightarrow{A} (8,5)$$

۶- اگر مجاز نبودیم از دستور C استفاده کنیم، آنگاه تعداد برنامه‌های مطلوب برابر با ۶ می‌شد که به شکل زیر می‌باشند:

AABB ABAB ABBA BBAA BABA BAAB

حال که قرار است دقیقاً یک عدد دستور C در لابه‌لای دستورها قرار داده شود، آن را در جای دلخواه قرار داده و تمام دستورهای بعد از آن را تعویض می‌کنیم (A را به B و B را به A تبدیل می‌کنیم)، که در این صورت هر برنامه به دست آمده برنامه مطلوب خواهد شد. به‌عنوان‌مثال اگر حرف C را به‌عنوان دومین حرف از سمت چپ برنامه ABAB قرار دهیم آن برنامه به شکل ACABA تغییر خواهد یافت که نقطه (۰ , ۰) را به (۲, ۲) تبدیل می‌کند.

چون در هر مورد برای C پنج جای متمایز وجود دارد. بنابراین تعداد دنباله‌های مطلوب ۵×۶ یعنی ۳۰ خواهد شد.

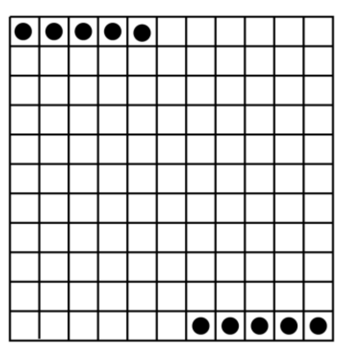
۷- در مرحله دوم خانه مورد نظر سفید و هر چهار خانه مجاور آن سیاه هستند، بنابراین در مرحله سوم نیز آن خانه سفید باقی خواهد ماند. در حقیقت در هر مرحله هر چهار خانه مجاور آن خانه یا سفید هستند و یا سیاه، بنابراین هرگز آن خانه سیاه نخواهد شد.

۸- معلوم است که با جمع‌کردن تعدادی از اعداد {۱, ۲, ۴} همه اعداد از ۱ تا ۷ را به شکل زیر می‌توان تولید کرد:

۱:۱ ۲:۲ ۳:۱+۲
۴:۴ ۳:۱+۲ ۳:۱+۲
۷:۱+۲+۴

حال باید توجه کرد که اگر زیرمجموعه دلخواهی از {۱۰, ۹, ۸, ۷, ۶, ۵, ۳}=A را در نظر بگیریم، بستگی به این‌که مجموع اعضای آن زیرمجموعه در تقسیم‌بر ۸ چه باقی‌مانده‌ای داشته باشد، می‌توان زیرمجموعه‌ای از مجموعه {۱, ۲, ۴} به آن اضافه کرد تا حاصل بر ۸ بخش‌پذیر باشد. اگر مجموع اعضای مجموعه تهی را ۰ در نظر بگیریم که بر ۸ بخش‌پذیر است، آنگاه به ازای هر زیرمجموعه دلخواهی از مجموعه A که تعداد آن‌ها $۲^۷$ یعنی ۱۲۸ است یک و فقط یک زیرمجموعه به‌صورت مطلوب یافت خواهد شد.

۹- معلوم است که اگر تعداد رخ‌ها کمتر از ۱۰ باشد همه خانه‌ها تهدید نخواهند شد زیرا در این صورت خانه‌ای وجود خواهد داشت که نه در سطرش مهره باشد و نه در ستونش. با ۱۰ رخ مطابق شکل مقابل می‌توان به جواب رسید.



۱۰- بهترین حالت آن است که در یک روز از جستجو جای دقیق دزد را شناسایی کنیم. چون از هر شهر حداقل به دو شهر دیگر می‌توان رفت، بنابراین با گذشت زمان هرگز جای دقیق دزد معلوم نخواهد شد.

۱۱- شهرها را مطابق شکل مقابل نامگذاری می‌کنیم:

A B C D E F

• روز اول به شهر A می‌رویم که اگر دزد در آن شهر بود دستگیر می‌کنیم و در غیر این صورت فاصله آن از A را اندازه گرفته و جای دقیق دزد را متوجه می‌شویم که یکی از حالات زیر پیش می‌آید:

☐اگر فاصله ۱ باشد یعنی دزد در شهر B است و در انتهای آن روز به یکی از دو شهر A و یا C خواهد رفت.

• روز دوم به شهر C می‌رویم که اگر دزد در آنجا بود دستگیر می‌کنیم، در غیر این صورت او حتماً در شهر A است که در انتهای روز به‌ناچار به شهر B خواهد رفت.

• روز سوم به شهر B رفته و دزد را دستگیر می‌کنیم.

☐اگر فاصله ۲ باشد آنگاه دزد در شهر C است که در انتهای روز به یکی از دو شهر D و یا B خواهد رفت.

• روز دوم به شهر D رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر می‌کنیم، در غیر این صورت او حتماً در شهر B است که در انتهای روز به یکی از دو شهر C و یا A خواهد رفت.

• روز سوم به شهر C رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر کرده و در غیر این‌صورت متوجه می‌شویم که او حتماً در شهر A است که در انتهای روز به ناچار به شهر B خواهد رفت.

• روز چهارم به شهر B رفته و دزد را دستگیر می‌کنیم.

☐اگر فاصله ۳ باشد آنگاه دزد در شهر D است که در انتهای روز به یکی از دو شهر C و یا E خواهد رفت.

• روز دوم به شهر C رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر می‌کنیم درغیر این‌صورت او حتماً در شهر E است که در انتهای روز به یکی از دو شهر F و D خواهد رفت.

• روز سوم به شهر D رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر کرده و در غیر این‌صورت متوجه می‌شویم که او در شهر F است که در انتهای روز به ناچار به شهر E خواهد رفت.

• روز چهارم به شهر E رفته و او را دستگیر می‌کنیم.

☐اگر فاصله ۴ باشد آنگاه دزد در شهر E می‌باشد که در انتهای روز به یکی از دو شهر F و یا D خواهد رفت.

• روز دوم به شهر D رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر کرده و در غیر این‌صورت متوجه می‌شویم که او در شهر F است که در انتهای روز به ناچار به شهر E خواهد رفت.

• روز سوم به شهر E رفته و دزد را دستگیر می‌کنیم.

☐اگر فاصله ۵ باشد آنگاه دزد در شهر F می‌باشد که در انتهای روز به شهر E خواهد رفت.

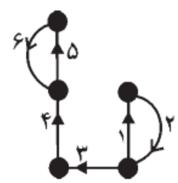
• روز دوم به شهر E رفته و دزد را دستگیر می‌کنیم.

۱۲- حرکت به سمت‌های راست، چپ، بالا و پایین را به ترتیب r، l، u و d نمایش می‌دهیم. حال گزینه‌ها را یکی پس از دیگری امتحان کرده و جایگاه آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

الف) عدد ۶۰۳۹ به‌صورت ۴k+۳ است، بنابراین حرکت آخر d بوده و عدد قبل از آن $\frac{۶۰۳۹-۳}{۴}$ یعنی ۱۵۰۹ است. عدد ۱۵۰۹ به‌صورت ۴k+۱ است، بنابراین حرکت آخر u بوده و عدد قبل از آن $\frac{۱۵۰۹-۱}{۴}$ یعنی ۳۷۷ است. عدد ۳۷۷ به‌صورت ۴k+۱ است. بنابراین حرکت آخر

u بوده و عدد قبل از آن $\frac{۳۷۷-۱}{۴}$ یعنی ۹۴ است. عدد ۹۴ به‌صورت ۴k+۲ است، بنابراین حرکت آخر l بوده و عدد قبل از آن $\frac{۹۴-۲}{۴}$ یعنی ۲۳ است. عدد ۲۳ به‌صورت ۴k+۳ است، بنابراین حرکت آخر d بوده و عدد قبل از آن $\frac{۲۳-۳}{۴}$ یعنی ۵ است. عدد ۵ به‌صورت ۴k+۱ است، بنابراین حرکت آخر u بوده و عدد قبل از آن ۱ است.

با توجه به توضیحات فوق معلوم می‌شود که عدد ۶۰۳۹ بعد از دنباله udluud نوشته می‌شود که جایگاه آن با توجه به شکل زیر در نقطه (۱- , ۱-) خواهد بود:



ب)

$۱۰۸۲ = ۴k + ۲ \Rightarrow k = ۲۷۰$,   حرکت= l

$۲۷۰ = ۴k + ۲ \Rightarrow k = ۶۷$,   حرکت= l

$۶۷ = ۴k + ۳ \Rightarrow k = ۱۶$,   حرکت= d

$۱۶ = ۴k \Rightarrow k = ۴$,   حرکت= r

$۴ = ۴k \Rightarrow k = ۱$,   حرکت= r

عدد ۱۰۸۲ بعد از دنباله rrdll نوشته می‌شود که جایگاه آن نقطه (۱- , ۰) است.

ج)

$۱۳۴۷ = ۴k + ۳ \Rightarrow k = ۳۳۶$,   حرکت= d

$۳۳۶ = ۴k \Rightarrow k = ۸۴$,   حرکت= r

$۸۴ = ۴k \Rightarrow k = ۲۱$,   حرکت= r

$۲۱ = ۴k + ۱ \Rightarrow k = ۵$,   حرکت= u

$۵ = ۴k + ۱ \Rightarrow k = ۱$,   حرکت= u

عدد ۱۳۴۷ بعد از دنباله uurrd نوشته می‌شود که جایگاه آن نقطه (۱, ۲) است.

د)

$۵۱۳۲ = ۴k \Rightarrow k = ۱۲۸۳$,   حرکت= r

$۱۲۸۳ = ۴k + ۳ \Rightarrow k = ۳۲۰$,   حرکت= d

$۳۲۰ = ۴k \Rightarrow k = ۸۰$,   حرکت= r

$۸۰ = ۴k \Rightarrow k = ۲۰$,   حرکت= r

$۲۰ = ۴k \Rightarrow k = ۵$,   حرکت= r

$۵ = ۴k + ۱ \Rightarrow k = ۱$,   حرکت= u

عدد ۵۱۳۲ بعد از دنباله urrrdr نوشته می‌شود که جایگاه آن نقطه (۰ , ۴) است.

ه)

$۵۹۲۱ = ۴k + ۱ \Rightarrow k = ۱۴۸۰$,   حرکت= u

$۱۴۸۰ = ۴k \Rightarrow k = ۳۷۰$,   حرکت= r

$۳۷۰ = ۴k + ۲ \Rightarrow k = ۹۲$,   حرکت= l

$۹۲ = ۴k \Rightarrow k = ۲۳$,   حرکت= r

$۲۳ = ۴k + ۳ \Rightarrow k = ۵$,   حرکت= d

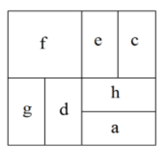
$۵ = ۴k + ۱ \Rightarrow k = ۱$,   حرکت= u

عدد ۵۹۲۱ بعد از دنباله udrlru نوشته می‌شود که جایگاه آن نقطه (۱ , ۱) است.

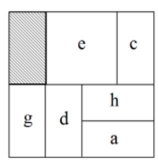
۱۳- هر بار که لامپ iاُم از ۰ به ۱ تبدیل می‌شود لامپ‌های سمت چپ آن تغییر نمی‌کنند ولی هرگاه آن لامپ از ۱ به ۰ تبدیل می‌شود لامپ (i +۱) اُم تغییر وضعیت می‌دهد. بنابراین اگر لامپ iام، ۲k بار تغییر وضعیت دهد (که k بار آن از ۰ به ۱ و k بار دیگر آن از ۱ به ۰ است) آنگاه لامپ (i +۱) اُم، k بار تغییر وضعیت می‌دهد. معلوم است که لامپ اول ۶۴ بار تغییر وضعیت می‌دهد، بنابراین لامپ‌های دوم، سوم، ... و هفتم به ترتیب ۳۲، ۱۶، ۸، ۴، ۲ و ۱ بار تغییر وضعیت خواهند داد. بنابراین:

$$\sum_{i=۱}^{۷} d_i = ۶۴ + ۳۲ + ۱۶ + ۸ + ۴ + ۲ + ۱ = ۱۲۷$$

۱۴- معلوم است که مربعی که از همه بالاتر است مربع B می‌باشد که با برداشتن آن به شکل مقابل خواهیم رسید:



در این حالت باید مربع F را برداریم که شکل باقی‌مانده به شکل زیر خواهد بود:



بعد از این مرحله اولین مربع قابل برداشت، مربع E می‌باشد که در بین گزینه‌ها فقط گزینه «ب» با مطالب اشاره‌شده سازگاری دارد.

۱۵- معلوم است که تعداد رشته‌های به طول i برابر ۲^i می‌باشد. بنابراین آخرین رشته ۹ حرفی که به‌صورت bbbbbbbbb می‌باشد رشته هزار و بیست و دوم می‌باشد زیرا:

$$۲ + ۴ + ۸ + ۱۶ + ۳۲ + ۶۴ + ۱۲۸ + ۲۵۶ + ۵۱۲ = ۱۰۲۲$$

به تعداد $۲^{۱۰}$ رشته ده حرفی می‌توان ساخت که نصف آنها با حرف a و نصف دیگر با حرف b شروع می‌شوند و چون رشته ۱۳۸۱اُم به نصفه اول متعلق است، بنابراین آن رشته با حرف a شروع می‌شود. لازم به ذکر است که رشته مورد نظر سیصد و پنجاه و نهمین رشته ده حرف است، زیرا ۳۵۹ = ۱۰۲۲ – ۱۳۸۱ در بین ۵۱۲ رشته‌ای که با a شروع می‌شوند ۲۵۶ تای اول آنها حرف دوم a و ۲۵۶ تای دیگر (که ۳۵۹ نیز به همین دسته متعلق است) حرف دوم b دارند. در بین آن ۲۵۶ رشته، ۱۲۸تای اول حرف سوم a و ۱۲۸تای دوم حرف سوم b دارند(چون ۱۲۸ > ۱۰۳ = ۲۵۶ – ۳۵۹، بنابراین رشته مورد نظر به دسته اول تعلق دارد). اگر به همین ترتیب ادامه دهیم خواهیم داشت:

$۱۳۸۱ - ۱۰۲۲ = ۳۵۹ < ۵۱۲ \Rightarrow$ حرف اول = a

$۳۵۹ > ۲۵۶ \Rightarrow$ حرف دوم =b

$۳۵۹ - ۲۵۶ = ۱۰۳ < ۱۲۸ \Rightarrow$ حرف سوم =a

$۱۰۳ > ۶۴ \Rightarrow$ حرف چهارم =b

$۱۰۳ - ۶۴ = ۳۹ > ۳۲ \Rightarrow$ حرف پنجم =b

$۳۹ - ۳۲ = ۷ < ۱۶ \Rightarrow$ حرف ششم =a

$۷ < ۸ \Rightarrow$ حرف هفتم =a

$۷ > ۴ \Rightarrow$ حرف هشتم =b

$۷ - ۴ = ۳ > ۲ \Rightarrow$ حرف نهم =b

$۳ - ۲ = ۱ \Rightarrow$ حرف دهم =a

۱۶- مجموع سکه‌های ۲ تومانی حداکثر برابر ۲۰ می‌تواند باشد، بنابراین تعداد کاسه‌های شامل ۵ تومانی حداقل برابر ۱۳ و حداکثر برابر ۱۵ می‌باشد. چون مجموع سکه‌های ۲ تومانی زوج است، بنابراین مجموع سکه‌های ۵ تومانی باید فرد باشد، بنابراین تعداد کاسه‌های شامل ۵ تومانی یا برابر ۱۳ است (که در این‌صورت تعداد کاسه‌های شامل ۲ تومانی برابر ۸ خواهد بود) و یا تعداد آن کاسه‌ها برابر ۱۵ است (که در این‌صورت تعداد کاسه‌های شامل ۲ تومانی برابر ۳ خواهد بود)، بنابراین جواب به شکل زیر خواهد بود:

$$? = \begin{bmatrix} ۲۰ \\ ۱۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۸ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲۰ \\ ۱۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

۱۷- اگر دنباله داده شده را به‌صورت $a_۱ ، a_۲ ، a_۳ ، ... ، a_n$ تصور کنیم آنگاه دنباله $b_۰ ، b_۱ ، b_۲ ، ... ، b_n$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} b_۰ = ۰ \\ b_i = a_۱ + a_۲ + ... + a_i \end{cases}$$

بنابراین دنباله جدید به شکل زیر به دست خواهد آمد:

۰ ، ۲ ، ۲ ، ۲ ، ۵ ، ۵ ، ۶ ، ۹ ، ۱۰ ، ۱۱ ، ۱۴ ، ۲۲ ، ۲۳ ، ۲۴ ، ۲۵ ، ۲۶ ، ۲۷

اگر b_k و b_l در تقسیم‌بر ۵ باقی‌مانده یکسان داشته، آنگاه b_k-b_l مضرب ۵ بوده و معلوم خواهد شد که زیر دنباله $a_{l+1} ، a_{l+2} ، ... ، a_k$ مضرب ۵ است. بنابراین کافی است زوج b_i هایی را پیدا کنیم که در تقسیم‌بر ۵ باقی‌مانده یکسانی دارند. b_i هایی متناسب با باقی‌مانده بر ۵ به پنج دسته زیر افراز می‌شوند:

۰ : ۰ ، ۵ ، ۵ ، ۱۰ ، ۲۵

۱ : ۶ ، ۱۱ ، ۲۶

۲ : ۲ ، ۲ ، ۲ ، ۲۲ ، ۲۷

۳ : ۲۳

۴ : ۹ ، ۱۴ ، ۲۴

به ازای هر دو عضو از یک دسته به یک زیردنباله مضرب ۵ خواهیم رسید، بنابراین:

$$? = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} = ۲۶$$

۱۸- حداکثر تعداد نفرات برای موقعی است که در هریک از ردیف‌های ۱ ، ۶ ، ۱۱ ، ۱۶ ، ... ، ۹۶ و ۱۰۱ دقیقاً ۲۰۰ نفر و در هریک از سایر ردیف‌ها ۰ نفر نشسته باشند که در این حالت تعداد نفرات ۲۰۰ × ۲۱ یعنی ۴۲۰۰ خواهد شد. حداقل تعداد نفرات نیز برای موقعی است که در هریک از ردیف‌های ۵ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ... و ۱۰۰ دقیقاً ۲۰۰ نفر و در هریک از سایر ردیف‌ها ۰ نفر نشسته باشند که در این حالت تعداد نفرات ۲۰۰ × ۲۰ یعنی ۴۰۰۰ خواهد شد.

۱۹- اولاً از نابرابری $f(n+1) > f(n)$ معلوم می‌شود که تابع اکیداً صعودی است، بنابراین رابطه $f(n) \geq n$ برقرار است و چون $f(1) \neq 1$ ، در نتیجه $f(n) > n$ (اگر $f(1) = 1$ ، آنگاه $f(f(1)) = 3$ یا $f(1) = 3$ که تناقض است).

اگر $f(1) = k \geq 3$ آنگاه $f(f(1)) = 3 \times 1$ یا $f(k) = 3$ که با $f(n) > n$ در تضاد است، بنابراین $f(1) = k = 2$:

$$
\begin{aligned}
f(1) = 2 \quad & \Rightarrow f(f(1)) = 3 \Rightarrow f(2) = 3 \\
& \Rightarrow f(f(2)) = 6 \Rightarrow f(3) = 6 \\
& \Rightarrow f(f(3)) = 9 \Rightarrow f(6) = 9 \\
& \Rightarrow f(f(6)) = 18 \Rightarrow f(9) = 18
\end{aligned}
$$

۲۰- تعداد دایره‌ها، مثلث‌ها و مربع‌های موجود در مرحله nام را به ترتیب با $D(n)$ ، $S(n)$ و $R(n)$ نمایش می‌دهیم که در این‌صورت خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
& D(1) = 1 \;,\; S(1) = 2 \;,\; R(1) = 0 \\
& D(n) = D(n-1) + R(n-1) \\
& R(n) = S(n-1) \\
& S(n) = D(n)
\end{aligned}
$$

بنابراین به جواب زیر خواهیم رسید:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
D	۱	۱	۳	۴	۷	۱۱	۱۸	۲۹	۴۷	۷۶	۱۲۳	۱۹۹
S	۲	۱	۳	۴	۷	۱۱	۱۸	۲۹	۴۷	۷۶	۱۲۳	۱۹۹
R	۰	۲	۱	۳	۴	۷	۱۱	۱۸	۲۹	۴۷	۷۶	۱۲۳

با توجه به جدول فوق معلوم می‌شود که در انتهای مرحله ۱۱ تعداد مثلث‌ها برابر ۱۲۳ می‌باشد.

۲۱- خطوط افقی و عمودی مربوط به نقطه i حداکثر یکی از خطوط افقی و یا عمودی مربوط به نقطه j را قطع می‌کنند. بنابراین با اضافه شدن نقطه kام حداکثر $(k-1)$ نقطه تلاقی جدید پدید می‌آید که به ازای حداقل یکی از نقاط تلاقی ناحیه باز و به ازای حداکثر $(k-2)$ نقطه تلاقی دیگر ناحیه بسته ایجاد می‌شود. بنابراین اگر حداکثر تعداد ناحیه‌های بسته برای k نقطه را با $D(k)$ نشان دهیم رابطه $D(k) = D(k-1) + k - 2$ برقرار خواهد بود. از طرف دیگر چون $D(2) = 0$، بنابراین:

$$
\begin{aligned}
& D(3) = D(2) + 1 = 1 \\
& D(4) = D(3) + 2 = 3 \\
& D(5) = D(4) + 3 = 6 \\
& D(6) = D(5) + 4 = 10 \\
& D(7) = D(6) + 5 = 15
\end{aligned}
$$

۲۲- اگر تصور کنیم که در حرکت iام به اندازه i واحد به جلو بجهد آنگاه خواهیم داشت:

$$۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n < ۱۳۸۱ < ۱ + ۲ + ۳ + \ldots + (n + ۱)$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+۱)}{۲} < ۱۳۸۱ \Rightarrow n(n+۱) < ۲۷۶۲ \Rightarrow n < ۵۳$$

به ازای $n = ۵۲$ و در حالتی که قورباغه در حرکت iام به اندازه i واحد بجهد به نقطه $\frac{۵۲\times۵۳}{۲}$ یعنی ۱۳۷۸ خواهد رسید. بنابراین کافی است برای رسیدن به نقطه ۱۳۸۱ در ۵۲ حرکت، فقط در سه جهش از ۵۲ جهش به جای i واحد جهیدن، به اندازه $i+1$ واحد بجهد.

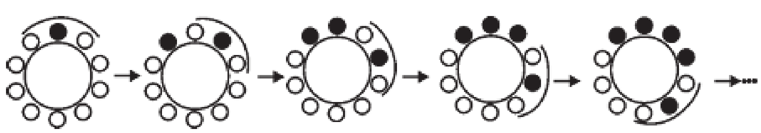
اگر تصور کنیم که قورباغه از حرکت ۵۲ به بعد در هر حرکت کمترین مقدار ممکن را بجهد آنگاه بعد از ۱۰ حرکت به نقطه ۱۹۵۶ خواهد رسید زیرا: ۱۹۵۶= ۶۲ + ... + ۵۵ + ۵۴ + ۵۳ + (۱۳۸۱). و اگر قورباغه در هر حرکت بیشترین مقدار ممکن را بجهد آنگاه بعد از ۱۰ حرکت به نقطه ۱۹۶۶ خواهد رسید که عقب‌تر از نقطه ۲۰۰۳ می‌باشد. اما نقطه مقصد بعد از ۱۱ حرکت به ترتیب در حالاتی که قورباغه کمترین مقدار و نیز بیشترین مقدار را بجهد برابر ۲۰۱۹ و ۲۰۳۰ می‌شود، به این معنا که رسیدن به نقطه ۲۰۰۳ از نقطه ۱۳۸۱ با شرایط اشاره شده غیر ممکن است.

۲۳-

- اگر نفر اول در ابتدا ۱ و در انتها a × را انتخاب کند (اگر نفر دوم ۰ را انتخاب کند a برابر ۲ و اگر نفر دوم ۲ را انتخاب کند آنگاه a برابر ۰ است) حاصل عدد به‌دست آمده مستقل از علامت انتخابی نفر دوم زوج خواهد شد.
- اگر نفر اول عدد ۱ را انتخاب کند آنگاه نفر دوم با انتخاب۲ × مستقل از انتخاب آخرِ نفر اول می‌تواند حاصل را زوج کند. و اما اگر نفر اول عدد۰ و یا ۲ را انتخاب کند آنگاه نفر دوم با انتخاب ۱ × مستقل از انتخاب آخرِ نفر اول می‌تواند حاصل را زوج کند.

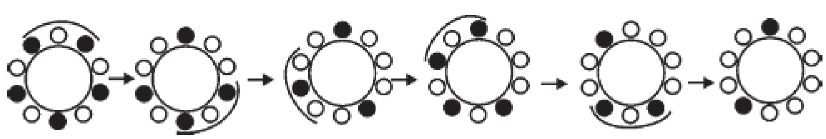
۲۴- اولاً واضح است که تعداد H ها نمی‌تواند برابر ۱۰ باشد، زیرا آخرین تغییر هم شامل H است و هم شامل T.

ثانیاً اگر تصور کنیم که تعداد H ها برابر ۹ باشد، مراحل انجام شده را از انتها به ابتدا مرتب می‌کنیم (H را با ○ و T را با ● نمایش می‌دهیم):



چون در هر مرحله سه تایی قابل تعویض منحصر به‌فرد می‌باشد، بنابراین نهایت کار مشخص است و هرگز سکه‌ها به صورت یک در میان H و T نخواهند شد.

و اما مراحل تولید ۸ تا H به شکل زیر می‌باشد:



۲۵- برای آن‌که حاصل b/c*d مقدار واقعی خود را نشان دهد آن را به یکی از چهار شکل زیر می‌توان پرانتزگذاری کرد:

۱) b/ c* d ۲) (b/ c* d)

۳) (b/ c) * d ۴) ((b/ c) * d)

همچنین اگر آن عبارت را t بنامیم آنگاه حاصل عبارت $a - t + e$ مستقل از قبلی‌ها به چهار شکل زیر می‌توان پرانتزگذاری کرد:

۱) $a - t + e$ ۲) $(a - t + e)$
۳) $(a - t) + e$ ۴) $((a - t) + e)$

بنابراین تعداد کل پرانتزگذاری‌ها ۴×۴ یعنی ۱۶ خواهد شد.

۲۶- یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید:

۱) هر پنج عضو متوالی باشند که تعداد این مجموعه‌ها برابر ۹۶ به‌دست می‌آید.
۲) دو عضو کوچک آن متوالی و نیز به عضو بزرگ آن نیز متوالی باشند ولی عضو دوم آن با عضو سومش متوالی نباشند که در این‌صورت مجموعه‌ای از ۱ تا ۱۰۰ به شکل زیر افراز خواهد شد:

$$\underbrace{\ldots\ldots}_{x}\times\times\underbrace{\ldots\ldots}_{y}\times\times\times\underbrace{\ldots\ldots}_{z}$$

تعداد افرازهای فوق با تعداد جواب‌های معادله $x + y + z = ۹۵$ با شرایط $x \geq ۰, y \geq ۱, z \geq ۰$ برابر است که تعداد جواب‌های چنین معادله‌ای برابر $\binom{۹۶}{۲}$ یعنی ۴۵۶۰ می‌باشد.
۳) سه عضو کوچک آن متوالی ونیز دو عضو بزرگ آن نیز متوالی باشند ولی عضو سوم آن با عضو چهارمش متوالی نباشد که در این‌صورت نیز تعداد جواب‌ها برابر $\binom{۹۶}{۲}$ یا ۴۵۶۰ به‌دست می‌آید.

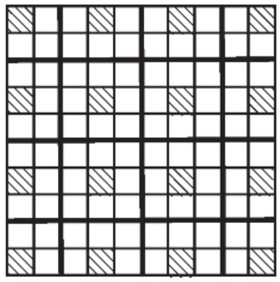
۲۷- ابتدا کره‌ها را به سه دسته دوتایی یک دسته یکی‌ای تقسیم کرده و کره‌های موجود در هر دسته دوتایی را به هم می‌چسبانیم که یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:
۱) هیچ زوجی جرقه نزند. در این حالت معلوم می‌شود که کره تن‌ها، از جنس غالب است.
۲) فقط یک زوج جرقه بزند، معلوم می‌شود که هر دو کره در آن دسته از جنس غالب است.
۳) فقط دو زوج جرقه بزند. از هریک از این دسته‌ها یک کره بیرون آورده و آن دو را به هم می‌چسبانیم که اگر جرقه زد، آنگاه هر دو از جنس غالب هستند و اگر جرقه نزد کره تن‌ها، از جنس غالب خواهد بود.
۴) هر سه زوج جرقه بزنند. از هریک از دسته‌های اول و دوم یک کره بیرون آورده و به هم می‌چسبانیم، اگر جرقه بزند که غالب هستند و اگر جرقه نزند هر دو کره موجود در دسته سوم غالب هستند.
در هر حالت معلوم می‌شود که تعداد اعمال چسباندن بیش از ۴ نمی‌شود.

۲۸- ابتدا توجه می‌کنیم که برای ترکیب سه دنباله با طول‌های a ، b و c ابتدا دو تا از آنها مانند a، b را ترکیب کرده (که حاصل دنباله به طول a+b و با هزینه a+b می‌شود) و سپس دنباله‌های حاصل را با دنباله سوم ترکیب می‌کنیم که حاصل دنباله‌ای به طول a+b+c شده ولی هزینه آن (a+b)+c می‌شود که در کل مجموع هزینه‌ها برابر ۲(a+b)+c می‌شود. برای آن‌که کل هزینه‌ها مینیمم شود کافی است هر یک از دو عدد a و b از عدد c کمتر یا مساوی باشند. بنابراین در هر دسته‌ای که حداقل ۳ دنباله داشته باشد ابتدا دنباله‌های با طول مینیمم را با هم ترکیب می‌کنیم، که به جدول زیر خواهیم رسید.

هزینه	دسته جدید	دسته دنباله‌ها
۹	۶, ۷, ۸, ۸, ۹, ۱۰	۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۸, ۱۰
۱۳	۸, ۸, ۹, ۱۰, ۱۳	۶, ۷, ۸, ۸, ۹, ۱۰
۱۶	۹, ۱۰, ۱۳, ۱۶	۸, ۸, ۹, ۱۰, ۱۳

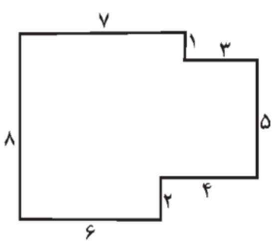
۱۹	۱۳ , ۱۶,۱۹	۹ , ۱۰,۱۳ ,۱۶
۲۹	۱۹,۲۹	۱۳ , ۱۶,۱۹
۴۸	۴۸	۱۹,۲۹
۱۳۴		

۲۹- اگر جدول را مطابق شکل، به ۱۶ ناحیه افراز کنیم آنگاه معلوم می‌شود که وجود حداقل یک خانه علامت‌دار در هر ناحیه الزامی است. بنابراین وجود حداقل ۱۶ خانه علامت‌دار حتمی است. در شکل با ۱۶ خانه علامت‌دار به‌منظور مسأله رسیده‌ایم:



۳۰- اگر از یک نقطه از محیط چندضلعی اشاره شده، شروع و در یک جهت محیط آن را طی کنیم تا به نقطه شروع بازگردیم آنگاه تعداد واحدهایی که به سمت راست حرکت می‌کنیم با تعداد واحدهایی که به سمت چپ حرکت می‌کنیم برابر است و این موضوع برای جهت‌های بالا و پایین نیز صحیح است، به این معنا که مجموع واحدهای عمودی و نیز مجموع واحدهای افقی زوج است که زوج بودن کل محیط n ضلعی را نتیجه می‌دهند.

به ازای ۴= n به مستطیل می‌رسیم که طول دو ضلع مقابل آن با هم برابر است و شرایط مسأله را برآورده نمی‌کند. به ازای ۶ = n چون مجموع اعداد از ۱ تا ۶ برابر ۲۱ بوده و فرد است، شرایط مسأله برآورده نمی‌شود. به ازای ۸ = n به شکلی مانند شکل مقابل می‌رسیم:



۳۱- اگر خانه‌های با مختصات (۲,۱) ، (۳,۱) ، (۴,۱) ، (۲,۱) ، (۱,۲) ، (۱,۳) ، (۱,۴) را به ترتیب انتخاب کنید صفحه شطرنجی خواهد شد. لازم به ذکر است که انتخاب هریک از آن خانه‌ها الزامی است، زیرا خانه‌ای مانند (۲,۱) را فقط انتخاب خودش می‌تواند تغییر رنگ دهد.

۳۲- به هر دانش‌آموز یک کد از ۱ تا ۳۰ داده و شماره او را در مبنای ۲ در نظر می‌گیریم. معلوم است که در آن مبنا شماره هر فرد حداکثر پنج رقمی است. بنابراین پنج لیست به نام‌های A، B، C ، D و E در نظر گرفته و هریک از آن‌ها را متناظر به یکی از ارقام پنج‌گانه اعداد در مبنای ۲ قرار می‌دهیم. در جایگاه‌هایی که رقم ۱ باشد در لیست متناظر آسم فرد را می‌نویسیم و در غیر این‌صورت آسم او را در آن لیست نمی‌نویسیم. به عنوان مثال آسم نفر یازدهم در لیست‌های A، B وD نوشته شده ولی در لیست‌های C و E نوشته نمی‌شود، زیرا عدد ۱۱ در مبنای ۲ به شکل ۰۱۰۱۱ نوشته می‌شود. لیست‌های پنج‌گانه را به یک نفر نشان می‌دهیم و او اطلاع می‌دهد که فرد المپیادی در کدام یک از لیست‌های پنج‌گانه قرار دارد که به این ترتیب شماره آن فرد شناسایی خواهد شد.

۳۳- اگر اعداد را از چپ به راست دو به دو در داخل یک بسته در نظر بگیریم اولاً معلوم می‌شود که مجموع اعداد موجود در داخل هر بسته برابر ۱۰۰۱ می‌شود و ثانیاً بسته اول پنج رقمی، هشت بسته بعدی چهار رقمی، نود بسته بعدی پنج رقمی و مابقی بسته‌ها همگی شش رقمی می‌باشند. بنابراین پس از اتمام بسته ۹۹ تعداد ارقام به‌کار رفته به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$? = ۱\times ۵ + ۸\times ۴ + ۹۰\times ۵ = ۴۸۷$$

بنابراین ۴۹۰ امین رقم، سومین رقم از بسته صدم می‌باشد. چون بسته صدم به شکل ۱۰۰۹۰۱ می‌باشد، بنابراین رقم موردنظر رقم صفر می‌باشد.

۳۴- رقم اول و آخر را یک بسته، رقم دوم و ماقبل آخر (نهم) را یک بسته، و رقم پنجم و ششم را نیز یک بسته در نظر می‌گیریم. اولاً معلوم می‌شود که تعداد بسته‌ها برابر ۵ می‌باشد و ثانیاً دو رقم موجود در درون هر بسته مستقل از بسته‌های دیگر بر روی هم سه حالت «۰۰»، «۱ ۰» و «۰ ۱» را می‌توانند داشته باشند، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $۳^{۵}$ می‌باشد.

۳۵- انتخاب جایگاه رخ در هریک از ستون‌های اول و دوم مستقل از یکدیگر به ۴ طریق، در ستون‌های سوم و چهارم به ۳ طریق، در ستون‌های پنجم و ششم به ۲ طریـــق و بالاخره در هریک از دو ستون آخر بـه ۱ طریـق ممکن است، بنابراین جواب مورد نظر $!۴ \times !۴$ یعنـی ۵۷۶ می‌باشد.

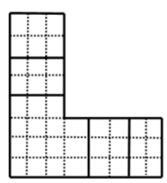
۳۶-
$$A(n) = B(n+۱) - ۱ \Rightarrow A(n) = [A(n-۱)+۲] - ۱ = A(n-۱)+۱$$

یعنی به ازای $n \geq ۲$ حاصل $A(n)$ از عدد قبلی خود ۱ واحد بیشتر است و چون $A(۲) = ۲$، بنابراین برابری $A(n)=n$ همیشه برقرار است.

$$B(n) = A(n-۲) + ۲ \Rightarrow B(n) = [B(n-۱) - ۱] + ۲ = B(n-۱)+۱$$

یعنی به ازای $n \geq ۳$ حاصل $B(n)$ از عدد قبلی خود ۱ واحد بیشتر است و چون $B(۳) = ۳$، بنابراین برابری $B(n)=n$ به ازای $n \geq ۳$ همیشه برقرار است.

۳۷- در شکل مقابل هریک از مستطیل‌های ۲×۳ مستقل از بقیه اشکال به دو طریق و نیز شکل پنجم فقط به یک طریق قابل پر شدن می‌باشند، بنابراین طبق اصل ضرب جواب موردنظر $۱ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ یعنی ۱۶ می‌باشد.



۳۸- اگر روی سنگ k ام باشیم و حرکت بعدی m ام باشد، با احتساب سنگی که به‌صورت جفت‌پا به روی آن پریده می‌شود مجموعاً m شماره طی می‌شود. بنابراین بعد از حرکت ۱۳۸۱ مجموعاً ۱۳۸۱ + ... + ۳ + ۲ + ۱ + ۱ یعنی ۹۵۴۲۷۲ شماره طی می‌شـود و بـعـد از آن حرکت بر روی شماره ۹۵۴۲۷۲ قرار خواهیم داشت که اگر آن عدد را بر ۷ تقسیم کنیم باقی‌مانده ۴ می‌آورد به این معنا که در آخرین حرکت به صورت جفت‌پا به روی سنگ شماره ۴ پریده شده است. لازم به ذکر است که حرکت اول از روی سنگ شماره ۱ بوده است، بنابراین به مجموع اعداد از ۱ تا ۱۳۸۱ عدد ۱ اضافه شده است.

۳۹- چند حرکت ابتدایی مشخص است. شماره سنگ‌هایی که پس از حرکات اول، دوم، سوم و چهارم بر روی آنها به‌صورت جفت‌پا پریده می‌شود به ترتیب ۲، ۴، ۷ و ۱۱ (همان ۱) می‌باشد که از سنگ ۱ به ترتیب ۱ واحد، (۱+۲) واحد، (۱+۲+۳) واحـد و بالاخـره (۱+۲+۳+۴) واحد فاصله دارند. دراین لحظه جهت عوض می‌شود و بعد از حرکت n ام دوباره به‌صورت جفت‌پا به روی شماره ۱ پریده خواهد شد که در آن n اولین عدد است که $n + ... + ۷ + ۶ + ۵$ مضرب ۱۰ باشد و این نیز موقعی برقرار است که $n + ... + ۳ + ۲ + ۱$ یا $\frac{n(n+۱)}{۲}$ مضرب ۱۰ و یا $n(n+۱)$ مضرب ۲۰ باشد که اولین n بعد از ۴ برای برآورده کردن آن شرط، $n = ۱۵$ می‌باشد. و بعد از ۱۵ نیز اعداد ۱۹ و ۲۰ آن شرط را برآورده می‌کنند. از حرکت بیستم تا حرکت سی و نهم کاملاً شبیه حرکت صفرم تا نوزدهم می‌باشد؛ یعنی سلسله حرکات دوره تناوبی به طول ۲۰ دارد، لذا حرکت ۲۰۰۳ در مکانی قرار داریم که در انتهای حرکت سوم داشته‌ایم، بنابراین بعد از آن حرکت بر روی سنگ هفتم به‌صورت جفت‌پا پریده خواهد شد.

۴۰- ابتدا باید توجه کرد که اگر X به Y و نیز Y به X سکه دهد آنگاه لازم است X و Y پدر و پسر باشند. در گزینه «ه» نفرات Q و S پدر و پسر هستند و نمودار نفرات بدون R مطابق شکل مقابل می‌شود. در آن نمودار جایگاه R جایی است که بتواند به S سکه بدهد که با توجه به نمودار، فقط می‌تواند پسر S باشد (پدر S، Q است و R نمی‌تواند پدر S باشد). اگر R پسر S باشد، آنگاه Q نمی‌تواند به R سکه بدهد در حالی‌که یکی از قسمت‌های گزینه «ه» به صورت $R \to Q$ می‌باشد. نمودار سایر گزینه‌ها به اشکال زیر می‌تواند باشد: